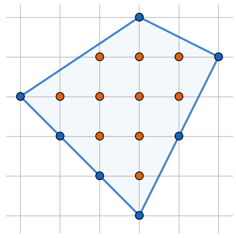
Формула Пика



Теорема (Формула Пика). Пусть вершины многоугольника расположены в узлах сетки, причём внутри него лежит m узлов сетки, а на границе n узлов. Тогда площадь этого многоугольника равна $m + \frac{n}{2} - 1$.

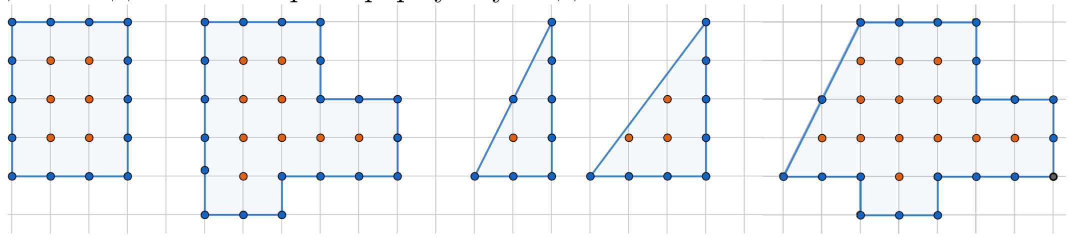
Задача 1. а) Проверьте, что формула Пика «работает» для простых фигур (для всех рисунков на этом листочке).
б) Нарисуйте какой-нибудь несамопересекающийся многоугольник с вершинами в узлах сетки и подсчитайте его площадь, используя формулу Пика.

Задача 2. Нарисуйте четырёхугольник с вершинами в точках с координатами $(0;0)$, $(3;5)$, $(8;11)$ и $(5;6)$. Чему равна его площадь?

Задача 3. Нарисуйте квадрат площади а) 2; б) 5 с вершинами в узлах сетки.

Задача 4. Шахматный король обошёл доску 8×8 клеток, побывав на каждом поле ровно один раз, и последним ходом вернулся на исходное поле. Ломаная, последовательно соединяющая центры полей, не имеет самопересечений.
а) Нарисуйте пример такой ломаной.
б) Какую наибольшую длину может иметь эта ломанная?
в) Какую площадь может ограничивать такая ломаная? Зависит ли эта площадь от того, как именно ходил король?

Задача 5 (Доказательство формулы Пика).
а) Докажите формулу для прямоугольника со сторонами, идущими по линиям сетки.
б) Докажите формулу для прямоугольного треугольника с катетами на линиях сетки.
в) Докажите формулу для многоугольника, составленного из двух многоугольников, для каждого из которых формула уже доказана.



Задача 6*. Вера хочет провести по линиям сетки замкнутую несамопересекающуюся ломаную, которая проходила бы через все узлы, лежащие внутри прямоугольника размером $p \times q$ клеток.
а) Какую длину будет иметь такая ломаная?
б) Какую площадь будет ограничивать такая ломаная?
в) При каких p и q у неё это получится, а при каких — нет?