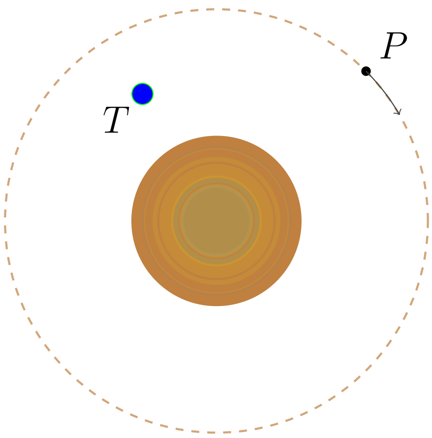
Комп∘зиции

- *Центральная симметрия относительно точки O* — преобразование, ставящее в соответствие каждой точке A такую точку A', что O — середина отрезка AA'.
- *Параллельный перенос на вектор $\vec{a}$* — преобразование, ставящее в соответствие каждой точке A такую точку A', что $\overrightarrow{AA'} = \vec{a}$.
- *Композиция* преобразований — это их последовательное применение. *Обозначение:* $g \circ f$ — композиция преобразований f и g. Обратите внимание на порядок записи: первым применяется отображение f, записанное правее.

Задача 0. а) Композиция двух параллельных переносов — параллельный перенос (или тождественное преобразование);
б) Композиция двух центральных симметрий относительно различных центров — параллельный перенос;
в) Композиция параллельного переноса и центральной симметрии (в любом порядке) — центральная симметрия.



Задача 1. В плоскости колец Сатурна между кольцами и планетой появилась летающая тарелка. На одной из частиц кольца установлен передатчик P (можно считать его точкой, движущейся по окружности с центром в центре Сатурна). Летающая тарелка T может мгновенно телепортироваться в точку, центрально симметричную её текущему положению относительно передатчика. Между телепортациями летающая тарелка неподвижно висит в космическом пространстве. Может ли тарелка попасть из точки, в которой находится сейчас, в любую другую точку между кольцами и планетой? Какое минимальное количество телепортаций ей для этого потребуется?

Задача 2. Петя отразил точку A относительно точки O_1, затем результат — относительно точки O_2, ещё раз отразил результат относительно точки O_3, и отметил полученную точку P. Затем Вася проделал те же действия в том же порядке с точкой P. Докажите, что в результате Васиных действий получилась снова точка A.

Композиции (продолжение)

Задача 3. На плоскости взяли точки O_1, $O_2, \ldots, O_{2n}$ и отрезок AB. Отрезок A_1B_1 симметричен AB относительно точки O_1, отрезок A_2B_2 симметричен A_1B_1 относительно точки O_2 и так далее (отрезок A_kB_k симметричен отрезку $A_{k-1}B_{k-1}$ относительно точки O_k). Докажите, что $AA_{2n} = BB_{2n}$.

Задача 4. а) В треугольнике $A_1A_2A_3$ отметили середины его сторон M_1, M_2 и M_3, а сам треугольник стёрли. Восстановите треугольник (то есть постройте его вершины и стороны) с помощью циркуля и линейки.
б) Та же задача для четырёхугольника $A_1A_2A_3A_4$.
в*) Та же задача для пятиугольника $A_1A_2A_3A_4A_5$.

Задача 5. Два прямоугольника положены на плоскость так, что их границы имеют восемь точек пересечения. Эти точки соединили через одну и закрасили получившийся четырёхугольник (см. рис.). Красный прямоугольник сдвинули, не поворачивая, так, что точек пересечения по-прежнему осталось 8. Докажите, что площадь закрашенного четырёхугольника не изменилась.