Поворот и угол между прямыми

Поворот и угол между прямыми

- *Поворот вокруг точки O на угол α* — преобразование, ставящее в соответствие каждой точке A такую точку A', что $AO = OA'$ и $\angle AOA' = \alpha$ (угол отмеряется против часовой стрелки). Поворот *сохраняет расстояния* (т.е. $A'B' = AB$) и *сохраняет углы* (т.е. $\angle A'B'C' = \angle ABC$).
- Угол между прямой и её образом при повороте равен углу поворота.

Задача 1. а) Треугольники OAB и OCD — равносторонние (вершины идут по часовой стрелке). Найдите угол между прямыми AC и BD.
б) $OABC$ и $ODEF$ — квадраты (вершины идут по часовой стрелке). Найдите угол между прямыми AD и CF.
в*) $OA_1A_2 \dots A_{n-1}$ и $OB_1B_2 \dots B_{n-1}$ — правильные n-угольники (вершины идут по часовой стрелке). Найдите угол между прямыми A_1B_1 и $A_{n-1}B_{n-1}$.

Задача 2. $A_1A_2 \dots A_n$ — правильный многоугольник. Найдите угол между диагоналями A_1A_j и $A_{k+1}A_{k+j}$.

Задача 3. На сторонах AC и BC равностороннего треугольника ABC отмечены точки D и E соответственно так, что $AD = CE$. Отрезки AE и BD пересекаются в точке F. Найдите угол BFE.

Задача 4. Поворот с центром O переводит прямую ℓ_1 в прямую ℓ_2, а точку A_1, лежащую на прямой ℓ_1, — в точку A_2. Докажите, что точка пересечения прямых ℓ_1 и ℓ_2 лежит на описанной окружности треугольника A_1OA_2.

Задача 5. Равнобедренные треугольники ABC и ADE (вершины идут по часовой стрелке) с основаниями BC и DE соответственно таковы, что $\angle BAC = \angle DAE = \alpha$. Докажите, что
а) $BD = CE$; б) угол между BD и CE равен α;
в) описанные окружности треугольников ABC и ADE проходят через точку пересечения BD и CE.

Задача 6*. Точки X, Y, Z лежат на одной прямой, а треугольники XBA, YBC, ZDC — равносторонние (см. рисунок). Докажите, что
а) угол между прямыми AC и XY равен $60°$;
б) точка пересечения AC и XY лежит на описанной окружности треугольника YBC;
в) AC, BD и XY пересекаются в одной точке.