Осевая симметрия

Осевая симметрия

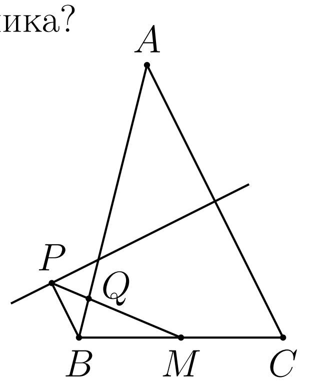
▷ *Симметрия (осевая симметрия) относительно прямой a* — преобразование, ставящее в соответствие каждой точке A такую точку A', что $AA' \perp a$ и расстояния от точек A и A' до прямой a равны. Прямую a называют *осью симметрии.* Симметрия

- *сохраняет расстояния* (т.е. $A'B' = AB$);
- *сохраняет углы* (т.е. $\angle A'B'C' = \angle ABC$);
- имеет бесконечно много *неподвижных точек* (каких?).

▷ Если при симметрии относительно прямой a фигура F переходит в себя, то a называют *осью симметрии фигуры* F.

Задача 1. а) M и N — середины оснований трапеции. Докажите, что если прямая MN перпендикулярна основаниям, то трапеция — равнобедренная.
б) С помощью симметрии докажите, что точка пересечения диагоналей равнобедренной трапеции лежит на прямой, соединяющей середины её оснований.

Задача 2. а) Докажите, что ось симметрии многоугольника пересекает его стороны либо в вершинах, либо в серединах.
б) У четырёхугольника есть ось симметрии. Докажите, что он либо симметричен относительно диагонали, либо имеет две параллельные стороны.
в) Сколько осей симметрии может быть у четырёхугольника?



Задача 3. Дан треугольник ABC. M — середина стороны BC, а P — проекция вершины B на серединный перпендикуляр к AC. Прямая PM пересекает сторону AB в точке Q. Докажите, что треугольник QPB — равнобедренный.

Задача 4*. а) На стороне CD ромба $ABCD$ нашлась такая точка K, что $AD = BK$. Пусть F — точка пересечения диагонали BD и серединного перпендикуляра к стороне BC. Докажите, что точки A, F и K лежат на одной прямой.
б) Та же задача, если точка K лежит на продолжении стороны CD.

Задача 5*. В треугольнике ABC $\angle B = 2\angle C$. Точки P и Q на серединном перпендикуляре к стороне CB таковы, что $\angle CAP = \angle PAQ = \angle QAB = \frac{1}{3}\angle A$. Докажите, что $QP = QB = QC$.