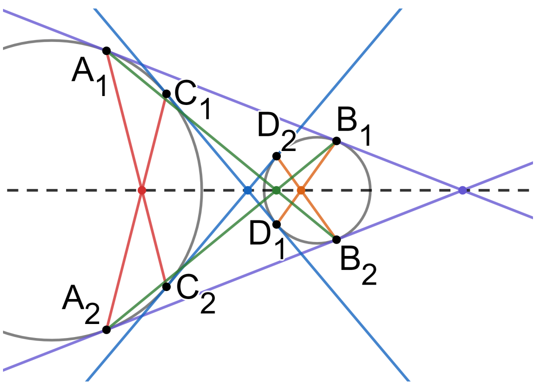
Окружности и симметрия

- *Симметрия (осевая симметрия, отражение) относительно прямой a* — преобразование, ставящее в соответствие каждой точке A такую точку A', что $AA' \perp a$ и расстояния от точек A и A' до прямой a равны. Прямую a называют *осью симметрии.*
- Если при симметрии относительно прямой a фигура F переходит в себя, то a называют *осью симметрии фигуры* F.
- Любой диаметр окружности является её осью симметрии.

Задача 1. Докажите, что для пары окружностей их *линия центров* (прямая, проходящая через центры окружностей) является осью симметрии.



Задача 2. а) Докажите, что точка пересечения общих внешних касательных к двум окружностями и точка пересечения общих внутренних касательных к ним лежат на линии центров этих окружностей.
б) Пусть A_1B_1 и A_2B_2 — общие внешние касательные двух окружностей, а C_1D_1 и C_2D_2 — их общие внутренние касательные (см. рисунок). Докажите, что точки пересечения прямых A_1B_2 и A_2B_1, A_1C_2 и A_2C_1, B_1D_1 и B_2D_2 лежат на одной прямой.

Задача 3. Докажите, что если существует окружность, касающаяся всех сторон выпуклого четырёхугольника $ABCD$, и окружность, касающаяся продолжений всех его сторон, то диагонали AC и BD этого четырёхугольника перпендикулярны.

Задача 4. Точка M лежит на диаметре AB окружности. Хорда CD проходит через M и пересекает AB под углом $45°$. Докажите, что сумма $CM^2 + DM^2$ не зависит от выбора точки M.

Задача 5*. Окружности ω_1 и ω_2 лежат одна вне другой. Общая внешняя касательная касается их в точках A и B. Окружность ω_3 проходит через точки A и B и вторично пересекает окружности ω_1 и ω_2 в точках C и D соответственно; K — точка пересечения прямых, касающихся окружностей ω_1 и ω_2 соответственно в точках C и D. Докажите, что $KC = KD$.