Гомотетия

Гомотетия

▷ *Гомотетия с центром в точке O и коэффициентом k* — преобразование плоскости, переводящую точку A в такую точку A', что $\overrightarrow{OA'} = k \cdot \overrightarrow{OA}$.

▷ Центральную симметрию можно рассматривать как гомотетию с $k = -1$.

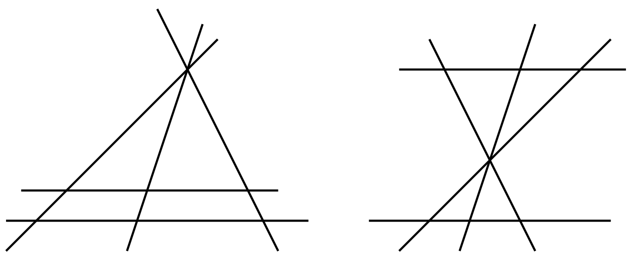
▷ Гомотетия

- *изменяет* расстояния в $|k|$ раз (то есть $A'B' = |k| \cdot AB$);
- сохраняет углы (то есть $\angle A'B'C' = \angle ABC$);
- сохраняет прямые, проходящие через центр гомотетии;
- переводит прямые, не проходящие через центр гомотетии, в параллельные им прямые.

Задача 1. Внутри правильного n-угольника $A_1 \ldots A_n$ взята точка P. Точки B_i построены центрально симметрично Р относительно A_i, $i = 1, \ldots, n$. Докажите, что многоугольник $B_1 \ldots B_n$ — тоже правильный.

Задача 2. Внутри квадрата $ABCD$ взята точка M. Докажите, что точки пересечения медиан треугольников ABM, BCM, CDM и DAM также образуют квадрат.

Задача 3. Прямые ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 проходят через точку O. Параллельные прямые a и b пересекают прямые ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 в точках A_1, A_2, A_3 и B_1, B_2, B_3 соответственно (расположение может быть разным — см. рисунки). Докажите, что $\frac{A_1A_2}{B_1B_2} = \frac{A_2A_3}{B_2B_3}$.



Задача 4. Продолжения сторон AB и CD четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке P. Прямая, проходящая через точку O пересечения диагоналей четырёхугольника параллельно CD, пересекает прямые AB, BC и AD в точках K, L и M соответственно. Найдите KL, если $OL = a$, $OM = b > a$.

Задача 5. На каждом из оснований AD и BC трапеции $ABCD$ построены вне трапеции равносторонние треугольники. Докажите, что отрезок, соединяющий третьи вершины этих треугольников, проходит через точку пересечения диагоналей трапеции.