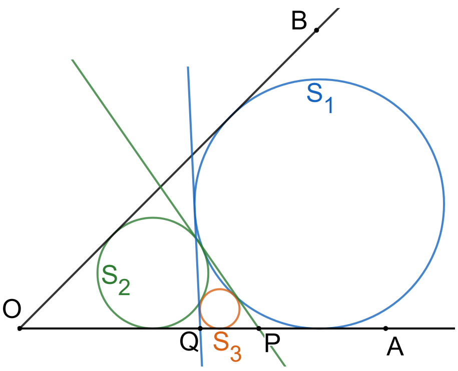
Композиции гомотетий

Композиции гомотетий

- *Гомотетия H_O^k с центром в точке O и коэффициентом k* — преобразование плоскости, переводящее точку A в такую точку A', что $\overrightarrow{OA'} = k \cdot \overrightarrow{OA}$.
- Гомотетия *изменяет* расстояния в $|k|$ раз, но сохраняет углы.
- *Композиция* преобразований — это их последовательное применение.
- Композиция гомотетий H_O^k и H_P^ℓ при $k, \ell \neq 1$ — это
  - параллельный перенос на вектор, если $k\ell = 1$;
  - гомотетия $H_Q^{k\ell}$, где $Q \in OP$, $\overrightarrow{OQ} \cdot (k-1) = \overrightarrow{QP} \cdot (1 - \frac{1}{\ell})$.



Задача 1. Окружности S_1 радиуса r_1 и S_2 радиуса $r_2 < r_1$ вписаны в угол AOB и касаются друг друга внешним образом. Окружность S_3 радиуса r_3 касается окружностей S_1, S_2 и луча OA. Вторая внешняя касательная к S_1 и S_3 пересекает луч OA в точке P, а вторая внешняя касательная к S_2 и S_3 пересекает OA в точке Q. Найдите $OQ : QP$.

Задача 2. На продолжении боковой стороны CD трапеции $ABCD$ за точку D отмечена точка P, M — середина AD. Прямые PM и AC пересекаются в точке Q, PB и AD — в точке X, а BQ и AD — в точке Y. Докажите, что точка M — середина XY.

Задача 3 (Теорема о трёх центрах). Если композиция трёх гомотетий является тождественным преобразованием, то центры этих трёх гомотетий лежат на одной прямой.

Задача 4. Трапеции $ABCD$ и $APQD$ имеют общее основание AD, причём длины всех их оснований попарно различны. Докажите, что на одной прямой лежат точки пересечения следующих пар прямых:
а) AB и CD, AP и DQ, BP и CQ;
б) AB и CD, AQ и DP, BQ и CP.

Задача 5 (Теорема Монжа/теорема о трёх колпаках). Общие внешние касательные окружностей S_1 и S_2 пересекаются в точке P, общие внешние касательные окружностей S_2 и S_3 — в точке Q, а общие внешние касательные окружностей S_3 и S_1 — в точке R. Докажите, что точки P, Q и R лежат на одной прямой.