Гомотетия — разные задачи

Гомотетия — разные задачи

- *Гомотетия H_O^k с центром в точке O и коэффициентом k* — преобразование плоскости, переводящее точку A в такую точку A', что $\overrightarrow{OA'} = k \cdot \overrightarrow{OA}$.
- Гомотетия *изменяет* расстояния в $|k|$ раз, но сохраняет углы.
- Образ a' прямой a при гомотетии параллелен a или совпадает с a.

Задача 1. M — точка пересечения медиан AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC; P — произвольная точка. Прямая ℓ_a проходит через точку A параллельно прямой PA_1; прямые ℓ_b и ℓ_c определены аналогично. Докажите, что
а) прямые ℓ_a, ℓ_b и ℓ_c пересекаются в одной точке Q;
б) точка M лежит на отрезке PQ, причем $PM : MQ = 1 : 2$.

Задача 2. Четырёхугольник разрезан диагоналями на четыре треугольника. Докажите, что точки пересечения медиан этих треугольников образуют параллелограмм.

Задача 3 (Прямая Эйлера). Докажите, что в любом треугольнике точка H пересечения высот, центр O описанной окружности и точка M пересечения медиан лежат на одной прямой, причём точка M расположена между точками O и H, и $MH = 2\,MO$.

Задача 4 (Окружность девяти точек / окружность Эйлера). Дан треугольник ABC с ортоцентром H, центром описанной окружности O и точкой пересечения медиан M. С помощью гомотетии докажите, что
а) центр E окружности, проходящей через середины сторон треугольника ABC, является серединой отрезка OH;
б) покажите, что середины отрезков, соединяющих H с вершинами треугольника, лежат на окружности с центром E из пункта а);
в) докажите, что основания высот треугольника ABC также лежат на этой окружности.

Задача 5. Окружности S_A, S_B и S_C одинакового радиуса вписаны в углы A, B и C треугольника ABC соответственно. Окружность S касается внешним образом всех трёх окружностей S_A, S_B и S_C. Докажите, что центр окружности S лежит на прямой, проходящей через центр I вписанной и центр O описанной окружностей треугольника ABC.