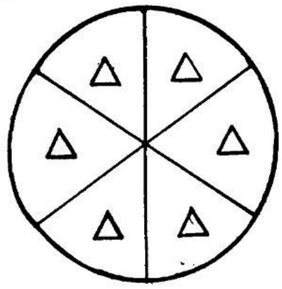
ИНВАРИАНТ

Определение. Инвариантом называется величина или некоторое свойство, которое не меняется при заданных преобразованиях.

1. На что смотреть? На общую сумму или произведение.



Задача 1. Круг разделен на 6 секторов, в каждом из которых стоит фишка. Разрешается за один ход сдвинуть любые две фишки в соседние с ними сектора. Можно ли с помощью таких операций собрать все фишки в одном секторе?

Задача 2. Вера, Надя и Люба решали задачи. Чтобы дело шло быстрее, они купили конфет и условились, что за каждую решенную задачу девочка, решившая ее первой, получает четыре конфеты, решившая второй — две, а решившая последней — одну. Девочки говорят, что каждая из них решила все задачи и получила 20 конфет, причем одновременных решений не было. Может ли такое быть?

2. На что смотреть? Посмотрите на часть картины.

Задача 3. 100 фишек выставлены в ряд. Разрешено менять местами две фишки, стоящие через одну. Можно ли с помощью таких операций переставить все фишки в обратном порядке?

3. На что смотреть? Посмотреть на четность чего-нибудь.

Задача 4. На острове Серобуромалин живет 13 серых, 15 бурых и 17 малиновых хамелеонов. Когда встречаются два хамелеона разного цвета, они одновременно перекрашиваются в третий цвет. Может ли через некоторое время оказаться, что все хамелеоны имеют один цвет?

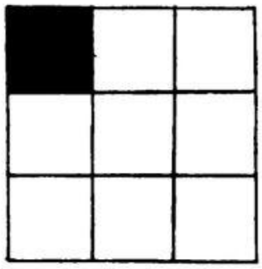
Задача 5. На доске написано число 12. В течение каждой минуты число либо умножают, либо делят на 2 или на 3, и результат записывают на доску вместо исходного числа. Докажите, что число, которое будет написано на доске ровно через час, не может быть равно 54.

Дальше пойдет "разнобой". Подумайте, что сохраняется в задаче и на что это влияет.

Задача 6. Хулиган Вася порвал стенгазету, причем каждый кусок он разрывал либо на 4, либо на 10 частей. Могло ли в конце получиться 2006 кусков?

Задача 7. На доске написаны числа 1, 2, 3, ..., 1989. Разрешается стереть любые два числа и написать вместо них разность этих чисел. Можно ли добиться того, чтобы все числа на доске стали нулями?

Дополнительные задачи:



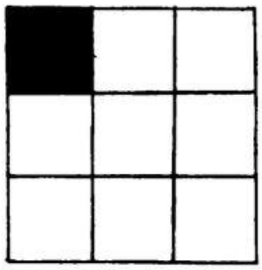
Задача 8. а) В таблице 8×8 одна из клеток закрашена чёрным цветом, все остальные – белым. Докажите, что с помощью перекрашивания строк и столбцов нельзя добиться того, чтобы все клетки стали белыми. Под перекрашиванием строки или столбца понимается изменение цвета всех клеток в строке или столбце. **б)** Решите ту же задачу для таблицы 3×3. Как и прежде, исходно лишь одна клетка (угловая) покрашена в черный цвет.

Задача 9. В таблице 8×8 все четыре угловые клетки закрашены чёрным цветом, все остальные – белым. Докажите, что с помощью перекрашивания строк и столбцов нельзя добиться того, чтобы все клетки стали белыми. Под перекрашиванием строки или столбца понимается изменение цвета всех клеток в строке или столбце.

Задача 10. На доске выписаны числа 1, 2, ..., 20. Разрешается стереть любые два числа a и b и заменить их на число $ab + a + b$. Какое число может остаться на доске после 19 таких операций?

Задача 11. На доске можно либо написать две единицы, либо стереть любые два уже написанных одинаковых числа n и написать вместо них числа $n + 1$ и $n - 1$. Какое минимальное количество таких операций требуется, чтобы получить число 2005? (Сначала доска была чистой.)

Дополнительные задачи:



Задача 8. а) В таблице 8×8 одна из клеток закрашена чёрным цветом, все остальные – белым. Докажите, что с помощью перекрашивания строк и столбцов нельзя добиться того, чтобы все клетки стали белыми. Под перекрашиванием строки или столбца понимается изменение цвета всех клеток в строке или столбце. **б)** Решите ту же задачу для таблицы 3×3. Как и прежде, исходно лишь одна клетка (угловая) покрашена в черный цвет.

Задача 9. В таблице 8×8 все четыре угловые клетки закрашены чёрным цветом, все остальные – белым. Докажите, что с помощью перекрашивания строк и столбцов нельзя добиться того, чтобы все клетки стали белыми. Под перекрашиванием строки или столбца понимается изменение цвета всех клеток в строке или столбце.

Задача 10. На доске выписаны числа 1, 2, ..., 20. Разрешается стереть любые два числа a и b и заменить их на число $ab + a + b$. Какое число может остаться на доске после 19 таких операций?

Задача 11. На доске можно либо написать две единицы, либо стереть любые два уже написанных одинаковых числа n и написать вместо них числа $n + 1$ и $n - 1$. Какое минимальное количество таких операций требуется, чтобы получить число 2005? (Сначала доска была чистой.)