Метод индукции

▷ Пусть имеется утверждение, зависящее от натурального n. Если это утверждение истинно при $n = 1$ *(база)* и из истинности его при каком-то произвольном натуральном $n = k$ следует его справедливость при следующем n, равном $k + 1$ *(шаг*, тогда данное утверждение верно для всех натуральных n.
Пример: Доказать, что $4^n - 1$ делится на 3.
База: $n = 1$. $4^1 - 1 = 3$ делится на 3.
Предположение: Пусть $4^k - 1$ делится на 3 *Шаг*: Докажем для $n = k + 1$.
$4^{k+1} - 1 = 4 \times 4^k - 1 = 4 \times 4^k - 4 + 3 = 4(4^k - 1) + 3$.
По предположению индукции $4^k - 1$ делится на 3, тогда и наше выражение тоже делится на 3.◁

1. Любую ли сумму из целого числа рублей больше семи, можно уплатить без сдачи денежными купюрами по 3 и 5 рублей?

2. Ученик Коля Васин при помощи метода математической индукции смог доказать, что в любом табуне все лошади одной масти. Если есть только одна лошадь, то она своей масти, так что база индукции верна. Для индуктивного перехода предположим, что есть n лошадей (с номерами от 1 до n). По индуктивному предположению лошади с номерами от 1 до n - 1 одинаковой масти. Аналогично лошади с номерами от 2 до n также имеют одинаковую масть. Но лошади с номерами от 2 до n - 1 не могут менять свою масть в зависимости от того как они сгруппированы — это лошади, а не хамелеоны. Поэтому все n лошадей должны быть одинаковой масти. Есть ли ошибка в этом рассуждении, и если есть, то какая?

3. Несколько прямых делят плоскость на части. Доказать, что можно раскрасить эти части в красный и в синий цвета так, чтобы соседние части(имеющие общий отрезок границы) были разного цвета.

4. В некоторой стране каждый город соединён с каждым дорогой с односторонним движением. Докажите, что найдётся город, из которого можно добраться в любой другой.

5. Человечество бессмертно и начинает свою историю от Адама и Евы; каждый человек – смертен. Докажите, что найдется бесконечная мужская цепочка, начинающаяся с Адама, в который каждый следующий человек – сын предыдущего.

6. Докажите, что любой квадрат $2^n \times 2^n$ без угловой клетки можно разрезать на уголки из трех клеток.

7. Доказать, что для любого натурального n $1 + 2 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

Дополнительные задачи

8. Доказать, что для любого натурального n $1 + 3 + 5 + ... + (2n - 1) = n^2$.

9. Проведём в выпуклом многоугольнике некоторые диагонали так, что никакие две из них не пересекаются (из одной вершины могут выходить несколько диагоналей). Доказать, что найдутся по крайней мере две вершины многоугольника, из которых не проведено ни одной диагонали.

10. На сколько частей делят плоскость n прямых, никакие две из которых не параллельны и никакие три не проходят через одну точку?

11. В прямоугольнике $3 \times n$ стоят фишки трёх цветов, по n штук каждого цвета. Доказать, что можно переставить фишки в каждой строке так, чтобы в каждом столбце были фишки всех цветов.

12. Три богатыря сражаются со Змеем Горынычем. Илья Муромец каждым своим ударом отрубает половину всех голов и еще одну, Добрыня Никитич — треть всех голов и еще две, а Алёша Попович — четверть всех голов и еще три. Богатыри бьют по одному, в том порядке, в котором считают нужным. Если ни один богатырь не может ударить из-за того, что число голов получится нецелым, то Змей съедает богатырей. Смогут ли богатыри отрубить все головы 2020-головому Змею?

13. Доказать, что квадрат можно разрезать на n квадратов(возможно разных размеров) при любом $n > 5$.

14. В колонию из 100 черных бактерий попадает белая бактерия. Каждую секунду каждая белая бактерия уничтожает черную бактерию, после чего все бактерии делятся надвое. Докажите, что когда-нибудь все черные бактерии будут уничтожены и выясните, когда это произойдет.

t.me/mccme7
mccme.ru/circles/mccme/2024