Арифметика остатков

Утверждение. Для любого целого числа a и натурального числа b существуют целые числа q и r, что $a=q \cdot b+r$.

Где r-остаток от деления числа a на b, $0 \le r < b$; q-неполное частное. Это чуть более сложная формулировка того, с чем вы уже прекрасно знакомы.

Разберем на примере: поделим число 83 с остатком на 12: *83 : 12 = 6 (ост.11).*

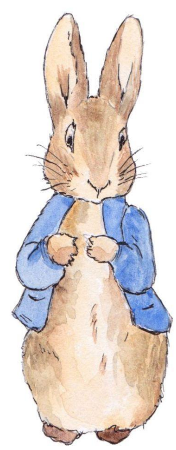
Сегодня же мы будем привыкать к записи $83 = 6 \cdot 12 + 11$.

Задание 0. Поделите с остатком **а)** 46 на 3; **б)** 123 на 4; **в)** 6719 на 7; **г)** 1001 на 10.
Задание 1. r-остаток от деления числа a на b, объясните, почему остаток принимает значения от 0 до $b-1$.
Задание 2. Известно, что число A имеет остаток $m-1$ при делении на m, а число B имеет остаток $m-2$ при делении на m. Какое остаток при делении на m будет иметь $A+B$?
Задание 3. Найдите последнюю цифру числа 2^{1000}.
Задание 4. Докажите, что среди любых 304 чисел можно выбрать 2 числа, разность которых будет делиться на 303.
Задание 5. Изменятся ли частное и остаток, если делимое и делитель увеличить в 3 раза?
Задание 6. При делении некоторого числа m на 13 и 15 получили одинаковые частные, но первое деление было с остатком 8, а второе без остатка.
Найдите число m.

Определение. Если целые числа a и b имеют одинаковый остаток при делении на m, то говорят, что они сравнимы по модулю m. Записывают это так: $a \equiv b \pmod m$.

Задание 7.Докажите, что $a \equiv b \pmod{m}$ тогда и только тогда, когда $a - b$ делится на m.
Доказательство состоит из двух частей, поскольку фраза “тогда и только тогда” подразумевает следствие в две стороны.
1 часть. Доказать, что из $a \equiv b \pmod{m}$ следует $a - b$ делится на m.
2 часть. Доказать, что из $a - b$ делится на m следует $a \equiv b \pmod{m}$.

Примеры: $2 \equiv 7 \pmod 5$; $11 \equiv 301 \pmod{10}$;
$5 \equiv -4 \pmod 9$; $7 \equiv 0 \pmod 7$; $16 \equiv 1 \pmod{15}$



Задание 8. а) С чем сравнимы нечетные числа по модулю 2? А четные?
б) Запишите в виде сравнения по модулю число 5k+4; 7d-2.
Задание 9. Докажите, что число $n^3 - n$ делится на 6 при любом целом n.

Дополнительные задачи:

Задание 10. Пусть a ≡ b (mod m) и c ≡ d (mod m).
Докажите, что

a) $a+c \equiv b+d \ (mod\ m)$

b) $a-c \equiv b-d \ (mod\ m)$

c) $ac \equiv bd \ (mod\ m)$

d) $a^n \equiv b^n \ (mod\ m)$

Задание 11. Найдите остаток от деления 99993 + 90995 на 9.

Задание 12. Докажите, что при любом натуральном n $2^{4n} - 1$ делится на 15.

Задание 13. Найдите остаток от деления 133·90 на 11.

Дополнительные задачи:

Задание 10. Пусть a ≡ b (mod m) и c ≡ d (mod m).
Докажите, что

a) $a+c \equiv b+d \ (mod\ m)$

b) $a-c \equiv b-d \ (mod\ m)$

c) $ac \equiv bd \ (mod\ m)$

d) $a^n \equiv b^n \ (mod\ m)$

Задание 11. Найдите остаток от деления 99993 + 90995 на 9.

Задание 12. Докажите, что при любом натуральном n $2^{4n} - 1$ делится на 15.

Задание 13. Найдите остаток от деления 133·90 на 11.