## Сравнение по модулю

***Определение.*** Если целые числа $a$ и $b$ имеют одинаковый остаток при делении на $m$, то говорят, что они сравнимы по модулю $m$.
Записывают это так: $a \equiv b \ (mod\ m)$.

На прошлом занятии мы доказали, что $a \equiv b \pmod{m}$ тогда и только тогда, когда $a - b$ делится на $m$.

---

**Задание 0.** С чем сравнимы: **а)** 7 по модулю 4?; **б)** -8 по модулю 9; **в)** 4567 по модулю 21?

**Задание 1.** Пусть a ≡ b (mod m) и c ≡ d (mod m).
Докажите свойства сравнений:
а) Можно умножать на число: $ka \equiv kb \ (mod\ m)$, где $k$-целое
b) Можно складывать и вычитать: $a+c \equiv b+d \ (mod\ m)$; $a-c \equiv b-d \ (mod\ m)$
c) Можно перемножать: $ac \equiv bd \ (mod\ m)$
d) Можно возводить в степень: $a^n \equiv b^n \ (mod\ m)$

**Задание 2.** Найдите остаток от деления $10^{1000}$ на 9.
**Задание 3.** Найдите остаток от деления $1000 \cdot 1001 \cdot 1002 \cdot 1003$ на 1004.
**Задание 4.** Докажите, что при любом натур. $n$ число $2^{4n} - 1$ делится на 15.

**Задание 5.** Докажите, что при любом натуральном $n$ выполнено $(13^n + 3^{n+2}) \vdots 10$
**Задание 6.** На поле выросло $7^{23789}$ цветочков. Известно, что в этом поле правят 8 группировок пчел. Сколько еще цветочков должно вырасти, чтобы пчелы могли поделить их поровну и не развязали войну.

**Задание 7.** Докажите, что $11^{n+2} + 12^{2n+1}$ делится на 133 при любом натуральном n.
**Задание 8.** Дано число $1^{999} + 2^{999} + ... + (10^6 - 1)^{999}$
**а)** Найдите его 3 последние цифры;
**б)** Найдите его 6 последних цифр.
**Задание 9.** Докажите, что квадрат нечётного числа дает остаток 1 при делении на 8.
**Задание 10.** Если разделить 2014 на 105, то в частном получится 19 и в остатке тоже 19. На какие ещё натуральные числа можно разделить 2014, чтобы частное и остаток совпали?

## *Дополнительные задачи:*

**Задание 11.** Докажите, что число и его сумма цифр имеют одинаковые остатки при делении на 9.

**Задание 12.** Докажите, что для всех натуральных n:

а) $(n^3 - n) \vdots 3$

б) $(n^5 - n) \vdots 5$

---

***Малая теорема Ферма:***

Пусть $a$- целое число, $p$-простое число, тогда для любого натурального $a$:

$$(a^p - a) \vdots p$$

Если $a$ не делится на $p$, то $a^{p-1} \equiv 1\ (mod\ p)$ .

---

**Задание 13.** Найдите остаток от деления $6^{102}$ на 101.

**Задание 14.** На занятии кружка 10 школьников решали 10 задач. Все школьники решили разное количество задач; каждую задачу решило одинаковое количество школьников. Один из этих десяти школьников, Боря, решил задачи с первой по пятую и не решил задачи с шестой по девятую. Решил ли он десятую задачу?

## *Дополнительные задачи:*

**Задание 11.** Докажите, что число и его сумма цифр имеют одинаковые остатки при делении на 9.

**Задание 12.** Докажите, что для всех натуральных n:

а) $(n^3 - n) \vdots 3$

б) $(n^5 - n) \vdots 5$

---

***Малая теорема Ферма:***

Пусть $a$- целое число, $p$-простое число, тогда для любого натурального $a$:

$$(a^p - a) \vdots p$$

Если $a$ не делится на $p$, то $a^{p-1} \equiv 1\ (mod\ p)$ .

---

**Задание 13.** Найдите остаток от деления $6^{102}$ на 101.

**Задание 14.** На занятии кружка 10 школьников решали 10 задач. Все школьники решили разное количество задач; каждую задачу решило одинаковое количество школьников. Один из этих десяти школьников, Боря, решил задачи с первой по пятую и не решил задачи с шестой по девятую. Решил ли он десятую задачу?