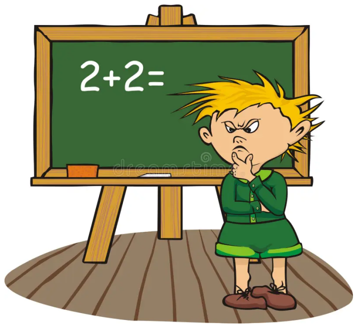
Системы счисления

Задача 0. Сколько будет 2+2? Перечислите все варианты!

▷ Кроме привычной нам десятичной, существуют системы счисления с любым натуральным основанием. Формально говоря, запись $\overline{abcd_n}$, означает число $d \cdot n^0 + c \cdot n_1 + b \cdot n^2 + a \cdot n^3$. Основание системы пишется индексом слева снизу; для цифр, больших 9, используют большие латинские буквы ($A = 10$, $B = 11$, ...). Например: $101_2 = 1 \cdot 1 + 1 \cdot 2^2 = 5$, $17_9 = 7 \cdot 1 + 1 \cdot 9 = 16$, $A4_{11} = 4 \cdot 1 + 10 \cdot 11 = 114$. ◁

Задача 1. **а)** В каких системах счисления справедливы равенства $3 \cdot 4 = 10$; $2 \cdot 2 = 5$?
б) Какие числа во всех системах счисления выглядят одинаково?

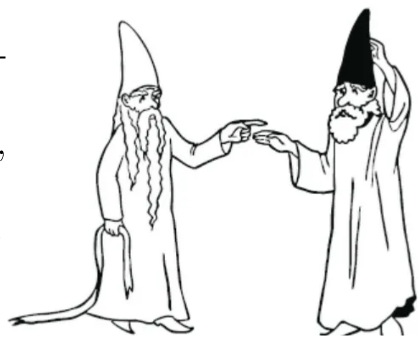


Задача 2. На кружок пришли 100 детей: 24 мальчика и 21 девочка. В какой системе счисления проходит кружок?

Задача 3. Переведите **а)** 10101_2, 2407_8, $7B1A_{12}$ в десятичную систему;
б) 57179_{10} в пятиричную и девятиричную системы;
в) 10011101_2, 13021102_4 в шестнадцатиричную систему, не переводя в десятичную.

Задача 4. Вычислите в столбик: **а)** $101011_2 + 111110_2$, $1011_2 \times 1011_2$;
б) $122121_3 + 212012_3$, $1122_3 \times 120_3$; **в)** $304234_5 + 211234_5$, $3214_5 \times 142_5$.

Задача 5. **а)** Сформулируйте и докажите признак делимости на 2 в троичной системе счисления; **б)** признак делимости на 7 в восьмиричной системе счисления.
в)* Попробуйте также сформурилировать и доказать признаки делимости на 2 и $n-1$ в системе с основанием n.



Задача 6. Скучающий император позвал к себе k мудрецов в пронумерованных колпаках. Каждому их них он положил под колпак по натуральному числу $a_1, a_2, \ldots, a_k$, меньшему 1000. За один вопрос мудрецам разрешается выбрать любые натуральные числа $b_1, b_2, \ldots, b_k$, и узнать сумму $a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_kb_k$. Первый вопрос им достанется бесплатно, а за каждый следующий император будет выгонять по одному мудрецу из дворца. **а)** Сколько мудрецов наверняка смогут остаться на службе, если дать им время подумать? **б)** Та же задача, но под колпаки положены произвольные (не обязательно меньшие 1000) натуральные числа.

Дополнительные задачи

Задача 7*. Сформулируйте и докажите признак делимости на

а) основание в какой-то степени (аналоги – признаки делимости на 10, 100);

б) делитель основания (аналоги – признаки делимости на 2, 5);

в) делитель числа "основание системы счисления - 1" (аналог – признак делимости на 3);

г) "основание + 1" (аналог – признак делимости на 11);

д) делитель числа "основание + 1" (аналога нет).

Задача 8*. Докажите, что любое натуральное число можно однозначно представить в виде $n = a_1 \cdot 1! + a_2 \cdot 2! + a_3 \cdot 3! + ...$, где $0 \leqslant a_1 \leqslant 1$, $0 \leqslant a_2 \leqslant 2$, $0 \leqslant a_3 \leqslant 3$. Этим вы изобретёте *факториальную систему счисления!*