

▷ Натуральное число называется **простым**, если у него есть ровно 2 натуральных делителя (1 и само число). **Составным** называют натуральное число, которое имеет больше 2 натуральных делителей. 1 не является ни простым, ни составным числом. ◁

▷ **Основная теорема арифметики:** каждое натуральное число можно единственным образом разложить на простые множители (с точностью до перестановки этих множителей). ◁

Задача 0. а) Найдите все простые числа, которые отличаются на 17. б)* А на 2?

Задача 1. (Разминка) а) Перечислите все делители чисел $3 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 19$; $7 \cdot 63$; 256. б) Произведение двух целых чисел равно 1000, но ни одно из них не делится на 10. Что это за числа?

Задача 2. (Решето Эратосфена) а) Выпишем целые числа от 2 до n . Подчеркнём 2 и сотрём числа, кратные 2. Первое неподчёркнутое число подчеркнём и сотрём кратные ему, и т. д., пока каждое число от 2 до n не будет подчеркнуто или стёрто. Докажите, что мы подчеркнём в точности простые числа от 1 до n .

б) Пусть очередное число, которое мы хотим подчеркнуть, больше \sqrt{n} . Докажите, что нестёртые к этому моменту числа от 2 до n простые.

в) Какие числа, меньшие 100, простые?

Задача 3. а) На числовой прямой отметим зелёными точками числа, кратные 18, и оранжевыми точками числа, кратные 30. Найдите наименьшее расстояние между зелёной и оранжевой точками. б) Аналогичный вопрос, но теперь в синий покрасим числа, дающие при делении на 24 остаток 17, и в серый – числа, дающие при делении на 40 остаток 7.

Задача 4. (Диофантовы уравнения) а) Решите в целых числах уравнение $2x + 3y = 1$. Для этого сначала найдите любое решение, а потом попробуйте выразить через него все остальные. Попробуйте проделать то же самое с уравнениями: б) $4x + 6y = 2$; в) $4x + 6y = 5$; г) $20x + 19y = 2019$.



Задача 5. Может ли $n!$ оканчиваться ровно на 4 нуля? А ровно на 5 нулей?

Задача 6*. Существует ли самое большое простое число?

Задача 7*. Попробуйте доказать основную теорему арифметики, используя факт: если $ab : p$, то $a : p$ или $b : p$. (Доказательство состоит из 2 частей: что существует какое-нибудь разложение на простые и что все разложения отличаются только порядком множителей.)