

Делимость и остатки

Задача 105. У царя Додона в 100 темницах сидят 100 узников. Все темницы заперты. Первый стражник подходит к каждой темнице и отпирает её. Второй подходит к каждой второй темнице. Если она открыта, он её запирает, а если заперта — открывает. Третий стражник подходит к каждой третьей темнице и поступает как второй: если она открыта, он её запирает, а если заперта — открывает. Всего стражников 100. Последний подходит только к 100-й темнице.

Сколько узников в итоге выйдут на свободу?

Задача 106. Докажите, что произведение любых трёх подряд идущих чисел делится на 6.

Задача 107. Докажите, что произведение любых пяти подряд идущих чисел делится на 30.

Задача 108. Докажите, что произведение любых пяти подряд идущих чисел делится на ... Найдите максимальное число, которое можно подставить на место двоеточия, чтобы утверждение было верным.

Задача 109. Докажите, что $n^5 + 4n$ делится на 5 при всех натуральных n .

Задача 110. Если p — простое число, большее 3, то $p^2 - 1$ делится на 24.

Задача 111. Три целых числа x , y и z связаны так: $x^2 + y^2 = z^2$. Докажите, что x или y делятся на 3.

Задача 112. Решите в натуральных числах $x^2 - y^2 = 303$.

Задача 113. Найдите последнюю цифру числа 9^{999} .

Задача 114. Найдите последнюю цифру числа 2^{100} .

Задача 115. Докажите, что $2222^{5555} + 5555^{2222}$ делится на 7.

Задача 116. К натуральному числу справа приписывают по одной цифре, кроме девятки. Докажите, что рано или поздно получится составное число.