

## Последовательность Фибоначчи

Пусть начальные числа  $F_0$  и  $F_1$  равны 0 и 1 соответственно. А каждое следующее число равно сумме двух предыдущих,  $F_k = F_{k-1} + F_{k-2}$  для  $k \geq 2$ .

**Задача 1.** Выпишите первые 15 чисел Фибоначчи.

**Задача 2.** Докажите, что

а)  $F_1 + F_2 + \dots + F_k = F_{k+2} - 1$ ;

б)  $F_1 + F_3 + \dots + F_{2k-1} = F_{2k}$ ;

в)  $F_2 + F_4 + \dots + F_{2k} = ?$

**Задача 3.** Заяц стоит на клетчатой полоске  $1 \times n$ . Он умеет прыгать на 1 или 2 клетки вправо. Сколькими способами он может допрыгать до 10 клетки? До  $n$ -й?

**Задача 4.** Сколькими способами можно замостить доску  $2 \times 10$  доминошками?

**Задача 5.** Есть 6 палочек, каждая не больше 1 метра в длину. Ни из каких трёх палочек нельзя составить треугольник. Какой наибольшей длины может быть самая короткая палочка?

**Задача 6.** Сколькими способами можно представить число  $k$  в виде сумму нечетных слагаемых? Порядок слагаемых важен. Например,  $k = 5$  можно представить в виде  $1 + 1 + 1 + 1 + 1$ ,  $1 + 1 + 3$ ,  $1 + 3 + 1$ ,  $3 + 1 + 1$ .

**Задача 7.** Докажите, что любые два соседних числа Фибоначчи взаимно просты.

**Задача 8.** Докажите, что любое натуральное число можно представить в виде суммы нескольких различных чисел Фибоначчи...

**Задача 9.** ...и это представление единственно, если в сумме запрещены соседние числа Фибоначчи.

**Задача 10.** Докажите тождество

$$F_{n+1} = C_n^0 + C_{n-1}^1 + C_{n-2}^2 + \dots$$