

Инварианты

В некоем процессе или последовательности можно обнаружить что-то неизменное. Это неизменное называют *инвариантом*. Это может быть величина или какое-то свойство. В каждой из задач попробуйте сформулировать, что оказывается инвариантом — и в каком именно процессе.

Задача 27. На доске написано число 100. Василий может прибавлять к написанному числу 3 или отнимать 6 — сколько угодно раз. Может ли Василий получить число 150?

Задача 28. Василий посчитал и выписал на доску произведение

$$100! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 98 \cdot 99 \cdot 100.$$

Затем посчитал сумму его цифр и записал получившееся новое число. Затем и для него посчитал сумму цифр... И так далее, пока не осталось однозначное число. Какое?

Задача 29. На столе стоят 16 стаканов, один вверх дном. За один раз можно перевернуть любые 4 стакана. Можно ли, повторяя эту операцию, поставить все стаканы дном вниз?

Задача 30. Даны числа 1, 2, 3, 4, 5, 6. Можно к любым двум из них прибавить по 1. Можно ли, повторяя эту операцию, сделать все числа равными?

Задача 31. На 44 елках, растущих в ряд через равные промежутки, сидят 44 веселых чижа, на каждой елке — по чижу. Если какой-то чиж перелетает с одной елки на другую, то какой-то другой чиж обязательно перелетает на столько же метров в противоположном направлении. Могут ли все чижи собраться на одной ёлке?



Задача 32. Есть куча из 1001 камня. Каждый раз, когда богатырь Добрыня делит кучу камней на две, царь платит ему столько монет, каково произведение количеств камней в двух получившихся кучах. Как должен действовать Добрыня, чтобы получить как можно больше?

Задача 16. В каждой вершине октаэдра поместили лампочку и зажгли одну из них. Далее, за ход можно выбрать любую грань и изменить состояние (потушить, если горит, и зажечь, если не горит) всех лампочек на ней. Можно ли за несколько ходов зажечь все лампочки?

