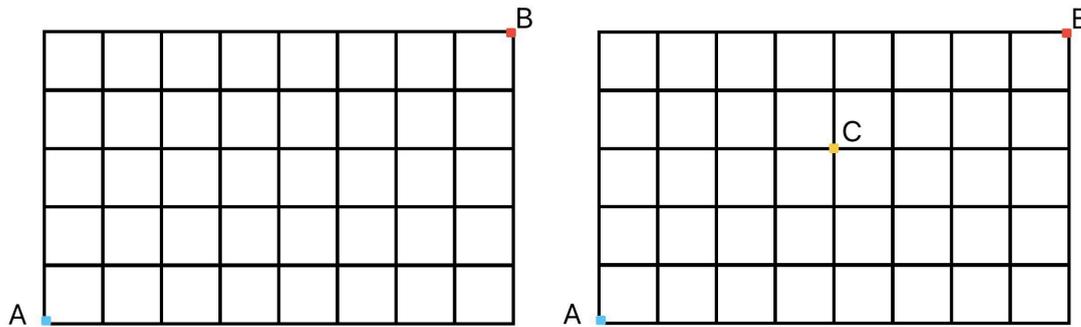


Число сочетаний из n по k — это количество способов выбрать k -элементное подмножество из n -элементного множества.

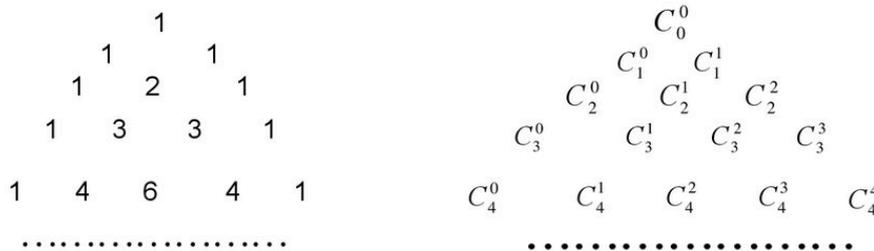
$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Маршрутом мы будем называть ломаную, у которой вершины имеют целочисленные координаты, а звенья направлены либо вправо, либо вверх.



Сколько существует маршрутов из A в B? Из A в B, проходящие через C?

Числа сочетания можно выписать в виде треугольной таблицы, где в строке с номером n находятся числа $C_n^0; C_n^1; C_n^2; \dots; C_n^{n-1}; C_n^n$.



Числа сочетаний удовлетворяют тождеству $C_{n+1}^{k+1} = C_n^k + C_n^{k+1}$. Значит, в треугольнике Паскаля каждое число равно сумме двух чисел, стоящих над ним в предыдущей строке.

Свойства треугольника Паскаля:

- Симметрия относительно вертикальной оси: $C_n^k = C_n^{n-k}$;
- Сумма чисел в строке n равна 2^n , кроме того, в каждой строке сумма чисел с нечётными номерами равна сумме чисел с чётными номерами и равна 2^{n-1} .

Бином Ньютона: $(a + b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + \dots + C_n^k a^{n-k} b^k + \dots + C_n^{n-1} a b^{n-1} + C_n^n b^n$.

Задача 1. У Пети 7 шпаргалок, а у Вити 9 шпаргалок. Сколькими способами они могут обменяться одной шпаргалкой? А тремя?

Задача 2. В классе 10 детей. Сколько способов есть выбрать 4 из них для участия в марафоне, если он состоит из 4 дистанций:

- а) 100м + 200м + 300м + 400 м;
б) 100м + 100м + 100м + 100м.

Задача 3. Дан выпуклый n -угольник, у которого никакие три диагонали не пересекаются в одной точке. Сколько точек пересечения диагоналей у этого многоугольника?



Задача 4. На бесконечной клетчатой полоске сидит хромой жук. Он хочет сделать $2n$ прыжков, каждый раз прыгая на соседнюю клетку, и вернуться в начальную клетку. Сколькими способами он может это сделать?

Задача 5. В выражении $(3x - 2)^n$ раскрыли скобки и привели подобные слагаемые. Коэффициент перед x^2 равен получился равен 216. Найдите все значения, которые может принимать n .

Задача 6. Докажите, что $(1 + x)^n + (1 - x)^n \leq 2^n$ при $n \geq 2$ и $|x| \leq 1$.

Задача 7. Сколькими способами, двигаясь по следующей таблице от буквы к букве, можно прочитать слово "квадрат"?

							к							
							в	в						
							а	а	а					
							д	д	д	д				
							р	р	р	р	р			
							а	а	а	а	а	а		
							т	т	т	т	т	т	т	

Задача 8. Докажите следующие тождества:

- 1) Пусть $n > k$. Докажите, что $k \cdot C_n^k = n \cdot C_{n-1}^{k-1}$.
- 2) Пусть $k \leq m \leq n$. Докажите, что $C_n^m \cdot C_m^k = C_n^k \cdot C_{n-k}^{m-k}$.
- 3) (Свертка Вандермонда) Для $k \leq n$ и $k \leq m$

$$C_n^0 C_m^k + C_n^1 C_m^{k-1} + C_n^2 C_m^{k-2} + \dots + C_n^k C_m^0 = C_{n+m}^k.$$

Задача 9. В классе 12 учеников. Их нужно разбить на две группы (первую и вторую), состоящие из чётного числа учеников. Сколькими способами это можно сделать?

Задача 10. На столе лежат 210 различных карточек с числами 2, 4, 6, ... 418, 420 (на каждой карточке написано ровно одно число, каждое число встречается ровно один раз). Сколькими способами можно выбрать 2 карточки так, чтобы сумма чисел на выбранных карточках делилась на 7?