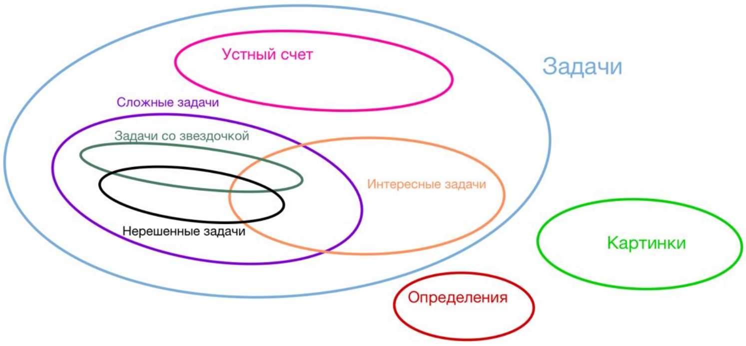
# Множества



▷ *Множество* – это набор *элементов.* Элементом может быть любой объект: число, задача, другое множество... Элементы множества перечисляют в фигурных скобках, например: $\{1,\ 2,\ \{1,\ 2\}\}$. Множество может быть пустым, обозначение: $\varnothing$. *Подмножество*– это множество, все элементы которого лежат в другом множестве. Бывает удобно рисовать множества в виде *кругов Эйлера,* пример можно увидеть справа. ◁




**Задача 1.** Нарисуйте круги Эйлера для следующей ситуации: Среди всех восьмиклассников школы N некоторые любят походы, а некоторые ходят на кружок по математике. Некоторые из походников умеет играть на гитаре, а некоторые умеют печь картошку. Кроме того среди восьмиклассников есть группа, ответственная за живой уголок, которая не любит ни математику, ни походы. Также имеется множество учителей этих школьников и множество их родителей.

**Задача 2.** Всего в школе N 60 восьмиклассников. Известно, что 25 из них ходят в походы, а 45 занимаются на кружке по математике. Ещё 5 занимаются только живым уголком, при этом каждый школьник попадает в одно из этих трёх множеств. Сколько школьников занимаются и походами, и математикой?

**Задача 3.** Какие из этих множеств являются подмножествами других: рациональные числа, целые числа, действительные числа, натуральные числа, $\{57, 179, 239\}$, положительные числа, чётные числа.

**Задача 4.** Найдите все подмножества целых чисел, обладающие таким свойством: **а)** вместе с каждым числом содержится числа, которые на 1 меньше и больше его; **б)** вместе с каждым числом содержится большее на 1, также содержится 0, и не найдётся двух разных чисел, которые в сумме дают 0.

**Задача 5.** В академии наук заседают математики, биологи и лингвисты. Про них известно следующее: во-первых, не все математики являются биологами, во-вторых, если лингвист не является биологом, то он не математик. Правда ли, что не все математики – лингвисты?

▷ *Пересечение* множеств – множество элементов, которые лежат в обоих множествах, обозначение: $A \cap B$. *Объединение* множеств – множество элементов, которые лежат хотя бы в одном множестве, обозначение: $A \cup B$. *Разность* множеств – множество таких элементов, которые лежат в первом множестве, но не лежат во втором, обозначение: $A \backslash B$. *Дополнение* множества – множество элементов, которые не лежат в нём, обозначение: $\overline{A}$. ◁

**Задача 6.** Пусть $A$ – множество остатков от деления на 5, $B$ – множество всех натуральных чисел, кратных 2, а $C$ – неположительные целые числа. Запишите с помощью символов $\cap$, $\cup$, $\backslash$: $\{0,\ 1,\ 3,\ 5\}$, $\varnothing$, $\{0\}$, $\{0,\ 2,\ 4\}$.

**Задача 7.** Докажите или опровергните с помощью кругов Эйлера для любых множеств $A$, $B$, $C$: **а)** $A\backslash(A\backslash B) = A \cap B$; **б)** $(A\backslash B) \cap C = (A \cap C)\backslash C$; **в)** $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$; **г)** $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$; **д)** $\overline{A\backslash B} = \overline{A}\backslash\overline{B}$; **е)** $(A \cap \overline{C\backslash B}) \cup (A \cap B) = (B \cap \overline{A\backslash B}) \cup (A \cap C)$.

**Задача 8.** Назовём *симметрической разностью* двух множеств $A \triangle B$ такие элементы, которые принадлежат ровно одному из них. **а)** Запишите определение симметрической разности с помощью символов $\cap$, $\cup$, $\backslash$ и скобок и нарисуйте диаграмму Эйлера для $(A\triangle B)\triangle C$. **б)** Докажите, что $A \cap (B \triangle C) = (A \cap B) \triangle (A \cap C)$.

**Дополнительные задачи**

**Задача 9.** В классе 32 ученика. Было организовано 33 кружка, причём каждый кружок состоит из трёх человек и никакие два кружка не совпадают по составу. Доказать, что найдутся такие два кружка, которые пересекаются ровно по одному ученику.

**Задача 10.** В городе "Многообразие" живут $n$ жителей, любые два из которых либо дружат, либо враждуют между собой. Каждый день не более чем один житель может начать новую жизнь: перессориться со всеми своими друзьями и подружиться со всеми своими врагами. Доказать, что все жители могут подружиться. *Примечание:* Если $A$ – друг $B$, а $B$ – друг $C$, то $A$ – также друг $C$. Предполагается также, что среди любых троих жителей хотя бы двое дружат между собой.

**Задача 11.** Сколько всего различных операций от трёх множеств можно выразить через объединение, пересечение и дополнение? (Тождественно равные операции считаются совпадающими.)

**Задача 12.** В ряду $1 + \ldots + 1$ из 105 единиц изменили знак на противоположный перед каждой третьей единицей, затем – перед каждой пятой, а затем – перед каждой седьмой. Найдите значение полученного выражения.

**Задача 13*.** Выведите формулу для $|A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n|$ ($|A|$ – количество элементов в множестве $A$).