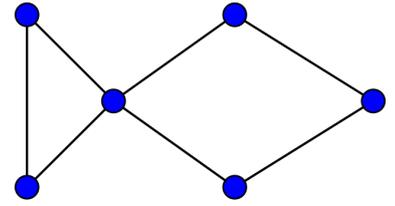


Напоминание:

Граф – это набор точек (мы будем называть их *вершины*) и *рёбер* соединяющих вершины (каждое ребро соединяет ровно две точки). Пример графа на рисунке справа.



**Задача 0.** Нарисуйте граф из пяти вершин и 10 рёбер.

**Задача 1.** Валера решил изучить алхимию, теперь он может превратить сапфир в алмаз, шило в мыло, ворона в лебедя, перо павлина в шило или лебедя, торт в лебедя или алмаз, мыло в перо павлина, ворона или в шило. К Валере пришёл Коля и просит сапфир, у Коли есть только шило, сможет ли Валера ему помочь? (Рисунок со стрелками – неплохая идея.)

**Задача 2.** Какое максимальное число рёбер может быть в графе **а)** с шестью, **б)** с  $n$  вершинами?

**Задача 3.** В графе  $n$  вершин и  $2n$  рёбер, при этом из каждой вершины выходит одинаковое число рёбер, какое?

**Задача 4.** На матфаке есть 17 компьютеров с номерами  $1, 2, \dots, 16, 17$ . Известно, что компьютеры соединены кабелем в том и только в том случае, если число, составленное как запись подряд номеров этих компьютеров делится на 9 (Например 12 и 15 соединены, так как 1215 делится на 9). Можно ли передать файл через кабели с компьютера 1 на компьютер 16? (Возможно посредством других компьютеров.)

*Степень* вершины – количество рёбер выходящих из неё.

**Задача 5.** Может ли быть, что в графе с 5 вершинами, у каждой из которых степень 3?

**Задача 6.** Существует ли граф из восьми вершин со степенями 1, 2, 2, 2, 3, 3, 4, 4?

**Задача 7.** В графе  $n$  вершин. У каждой вершины степень **а)** 2, **б)** 5. Сколько рёбер в графе? **в)** А сколько рёбер в графе, сумма степеней вершин которого равна  $2k$ ?

**Задача 8.** Пешеход обошёл шесть улиц одного города, пройдя каждую ровно два раза, но не смог обойти их, пройдя каждую лишь раз. Могло ли это быть?

**Задача 9.** Айгишник Ерёма (уже не тиран, как в прошлом году) заметил, что в МЦНМО, любые два компьютера соединены одним из двух видов кабелей, докажите, что Ерёма может оставить только один вид кабелей, при том, что с каждого компьютера можно будет переслать файл на любой другой (возможно через другие компьютеры).



*Цикл* – это замкнутый путь по рёбрам, при этом каждое ребро и каждая вершина проходится один раз. (короче, цикл – это цикл)

**Задача 10.** Сколько рёбер в *связном* графе (то есть в таком, что из каждой его вершины можно прийти в каждую по рёбрам) без циклов с  $n$  вершинами? Такой граф называется *деревом*.

**Задача 11.** Докажите, что в дереве **а)** есть вершина степени 1, **б)** есть хотя бы две таких вершины, если в графе хотя бы две вершины.

**Задача 12.** Докажите, что если в графе с  $n$  вершинами больше, чем  $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$  рёбер, то он связан.

**Задача 13.** Докажите, что в любом связном графе можно удалить вершину вместе со всеми выходящими из нее рёбрами так, чтобы он остался связным.

0	1	2	2	3	4	5	6	7	7	7	8	9	10	11	11	12	13
		а	б					а	б	в				а	б		

### Дополнительные задачи

**Задача 14.** Докажите, что если в графе с  $n$  вершинами, степень каждой не менее чем  $\frac{n-1}{2}$ , то он связан.

**Задача 15.** Можно ли четыре раза рассадить девять человек за круглым столом так, чтобы никакие двое не сидели рядом более одного раза?

**Задача 16.** За круглым столом сидят 80 человек. Может ли случиться, что у каждого из них, между которыми сидит чётное число человек, есть за столом общий знакомый, а у каждого из них, между которыми сидит нечётное число человек, общего знакомого нет?

**Задача 17\*.** Сколько циклов в *полном* графе? Полный – с максимальным числом рёбер для данного числа вершин.

### Дополнительные задачи

**Задача 14.** Докажите, что если в графе с  $n$  вершинами, степень каждой не менее чем  $\frac{n-1}{2}$ , то он связан.

**Задача 15.** Можно ли четыре раза рассадить девять человек за круглым столом так, чтобы никакие двое не сидели рядом более одного раза?

**Задача 16.** За круглым столом сидят 80 человек. Может ли случиться, что у каждого из них, между которыми сидит чётное число человек, есть за столом общий знакомый, а у каждого из них, между которыми сидит нечётное число человек, общего знакомого нет?

**Задача 17\*.** Сколько циклов в *полном* графе? Полный – с максимальным числом рёбер для данного числа вершин.

### Дополнительные задачи

**Задача 14.** Докажите, что если в графе с  $n$  вершинами, степень каждой не менее чем  $\frac{n-1}{2}$ , то он связан.

**Задача 15.** Можно ли четыре раза рассадить девять человек за круглым столом так, чтобы никакие двое не сидели рядом более одного раза?

**Задача 16.** За круглым столом сидят 80 человек. Может ли случиться, что у каждого из них, между которыми сидит чётное число человек, есть за столом общий знакомый, а у каждого из них, между которыми сидит нечётное число человек, общего знакомого нет?

**Задача 17\*.** Сколько циклов в *полном* графе? Полный – с максимальным числом рёбер для данного числа вершин.

### Дополнительные задачи

**Задача 14.** Докажите, что если в графе с  $n$  вершинами, степень каждой не менее чем  $\frac{n-1}{2}$ , то он связан.

**Задача 15.** Можно ли четыре раза рассадить девять человек за круглым столом так, чтобы никакие двое не сидели рядом более одного раза?

**Задача 16.** За круглым столом сидят 80 человек. Может ли случиться, что у каждого из них, между которыми сидит чётное число человек, есть за столом общий знакомый, а у каждого из них, между которыми сидит нечётное число человек, общего знакомого нет?

**Задача 17\*.** Сколько циклов в *полном* графе? Полный – с максимальным числом рёбер для данного числа вершин.