

Напоминание:

◇ *Деревом* называется связный граф без циклов.

◇ А *связный граф* – это такой граф, что между любыми двумя вершинами есть путь.

Задачах 3-5 даны для напоминания, если Вы сдали их в девятом листке, их можно не сдавать (10, 11, 13 соответственно).

Задача 0. Нарисуйте два разных дерева с 5 вершинами, несвязный граф с пятью вершинами и связный граф с двумя циклами.

Задача 1. Нарисуйте дерево, у которого есть **а)** вершина степени 5, **б)** вершина степени 3 и вершина степени 4 **в)** у которого все вершины имеют степень 1.

Задача 2. Докажите, что в дереве каждые две вершины соединены ровно одним путем.

Задача 3. Докажите, что при удалении любого ребра из дерева оно превращается в несвязный граф.

Задача 4. Сколько рёбер в дереве с n вершинами?

Задача 5. Докажите, что в дереве **а)** есть вершина степени 1, **б)** есть хотя бы две таких вершины, если в графе хотя бы две вершины.

Задача 6. Докажите, что в любом связном графе можно удалить вершину вместе со всеми выходящими из нее рёбрами так, чтобы он остался связным.

Задача 7. В стране некоторые города соединены двухсторонними авиалиниями, причём из города А в город В нельзя попасть, сделав менее 5 пересадок, а сделав 5 — можно. Докажите, что все авиалинии можно распределить между 6 авиакомпаниями таким образом, чтобы любой маршрут из А в В проходил по авиалиниям, принадлежащим всем 6 авиакомпаниям.

Задача 8. Докажите, что из связного графа всегда можно получить дерево удаляя рёбра.

Ещё определения:

◇ *Полный граф* – это граф с максимальным количеством рёбер.

◇ *Двудольный граф* – это такой граф, что его вершины можно разбить на две группы так, что между вершинами в одной группе нет рёбер.

Задача 9. Сколько вершин в полном графе на n вершинах?



Задача 10. **а)** Правда ли, что любой граф двудольный? **б)** Правда ли, что дерево – всегда двудольный граф? **в)** Правда ли, что если все циклы в графе чётной длины, то граф двудольный?

Задача 11. Какое максимальное число рёбер можно удалить из полного графа, чтобы он стал двудольным, но остался связным?



0	1 а	1 б	1 в	2	3	4	5 а	5 б	6	7	8	9	10 а	10 б	10 в	11

Дополнительные задачи

Задача 12. Какое наибольшее число рёбер может быть в двудольном графе на n вершинах?

Задача 13. Пусть у нас есть бесконечное дерево (так можно, определение то же). **а)** Верно ли, что тогда есть бесконечно длинный путь? То есть, что мы можем выйти из вершины и не повторяясь бесконечно идти по рёбрам. **б)** А если степень каждой вершины конечна?

Задача 14. В графе 1001 вершина, а любой простой цикл состоит ровно из 3 рёбер. Какое наибольшее количество рёбер может быть в этом графе?

Задача 15. В стране несколько городов, некоторые пары городов соединены дорогами, причём между каждыми двумя городами существует единственный несамопересекающийся путь по дорогам. Известно, что в стране ровно 100 городов, из которых выходит по одной дороге. Докажите, что можно построить 50 новых дорог так, что после этого даже при закрытии любой дороги можно будет из каждого города попасть в любой другой.

Дополнительные задачи

Задача 12. Какое наибольшее число рёбер может быть в двудольном графе на n вершинах?

Задача 13. Пусть у нас есть бесконечное дерево (так можно, определение то же). **а)** Верно ли, что тогда есть бесконечно длинный путь? То есть, что мы можем выйти из вершины и не повторяясь бесконечно идти по рёбрам. **б)** А если степень каждой вершины конечна?

Задача 14. В графе 1001 вершина, а любой простой цикл состоит ровно из 3 рёбер. Какое наибольшее количество рёбер может быть в этом графе?

Задача 15. В стране несколько городов, некоторые пары городов соединены дорогами, причём между каждыми двумя городами существует единственный несамопересекающийся путь по дорогам. Известно, что в стране ровно 100 городов, из которых выходит по одной дороге. Докажите, что можно построить 50 новых дорог так, что после этого даже при закрытии любой дороги можно будет из каждого города попасть в любой другой.

Дополнительные задачи

Задача 12. Какое наибольшее число рёбер может быть в двудольном графе на n вершинах?

Задача 13. Пусть у нас есть бесконечное дерево (так можно, определение то же). **а)** Верно ли, что тогда есть бесконечно длинный путь? То есть, что мы можем выйти из вершины и не повторяясь бесконечно идти по рёбрам. **б)** А если степень каждой вершины конечна?

Задача 14. В графе 1001 вершина, а любой простой цикл состоит ровно из 3 рёбер. Какое наибольшее количество рёбер может быть в этом графе?

Задача 15. В стране несколько городов, некоторые пары городов соединены дорогами, причём между каждыми двумя городами существует единственный несамопересекающийся путь по дорогам. Известно, что в стране ровно 100 городов, из которых выходит по одной дороге. Докажите, что можно построить 50 новых дорог так, что после этого даже при закрытии любой дороги можно будет из каждого города попасть в любой другой.