МЦНМО 8, Занятие 16

Целые числа 2

25.01.2025

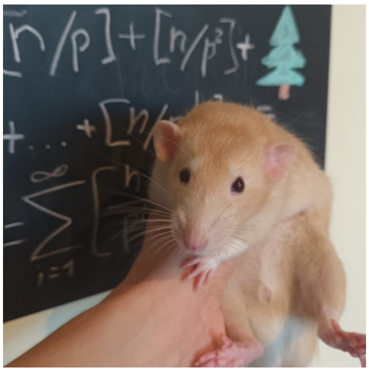
▷ Запись (a, b) означает *наибольший общий делитель* целых чисел a и b. Если $(a, b) = 1$, числа a и b называют *взаимно простыми.* ◁

Задача 1. **а)** Покажите, что число (a, b) существует и единственно (говорят, что оно корректно определено), если хотя бы одно из чисел не равно нулю. **б)** Докажите, что $(a, b) = (a + b, b)$.

▷ Аналогично обозначим *НОК:* $[a, b]$. Это наименьшее натуральное число, делящееся на a и b. ◁

Задача 2. Найдите $(n, n + 1), [n, n + 1]$.

▷ **Основная теорема арифметики:** каждое натуральное число можно единственным образом разложить на простые множители (с точностью до перестановки этих множителей): $n = p_1^{a_1} \cdot p_2^{a_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{a_k}$. ◁



Крыса Лежандр

Задача 3*. Попробуйте доказать основную теорему арифметики, используя факт: если $ab \,\vdots\, p$, то $a \,\vdots\, p$ или $b \,\vdots\, p$. (Доказательство состоит из 2 частей: что существует какое-нибудь разложение на простые и что все разложения отличаются только порядком множителей.)

Задача 4. **а)** Как, зная разложения чисел a и b на простые, найти (a, b) и $[a, b]$? **б)** Чему равняется $(a, b) \cdot [a, b]$? **в)** Докажите, что $[a, b]/a$ и $[a, b]/b$ взаимно просты.

Задача 5. Про натуральные числа a и b известно, что $(a, b) = 14$ и $[a, b] = 15$. Чему могут равняться a и b?

Задача 6. Найдите $[1, 2, 3, \ldots, 100]/[2, 4, 6, \ldots, 200]$.

Задача 7. (*Формула Лежандра*) Докажите, что простое число p входит в разложение числа $n!$ в степени $[n/p] + [n/p^2] + [n/p^3] + \ldots = \sum\limits_{i=1}^{\infty} [n/p^i]$ ($[a]$ здесь обозначает целую часть числа a). С какого момента все слагаемые станут нулями?

На круглом столе по теории чисел с коллегами

Задача 8. **а)** Сколько нулей у 2025! в конце десятичной записи? **б)** Может ли запись $n!$ заканчиваться ровно на 14 нулей?

Задача 9. При каких натуральных n число $(n - 1)!$ не делится на n?

Дополнительные задачи

Задача 10. **а)** Пусть $(a, b) = 1$. Докажите, что найдутся такие целые x, y, что $ax + by = 1$. **б)** С помощью этого равенства докажите, что если есть целое c и $ac \,\vdots\, b$, то $c \,\vdots\, b$. **в)** Докажете факт, который нужен для доказательства ОТА.

Задача 11. Числа a, b – положительные числа. Пусть I – множество всех чисел, представимых в виде $ax + by$ с целыми x, y. Пусть d – наименьшее положительное число в I. Докажите, что **а)** каждое число из I делится на каждый общий множитель a и b; **б)** каждое число из I делится на d; **в)** $d = (a, b)$; **г)** I – множество всех целых чисел, делящихся на (a, b); **д)** (a, b) – наименьшее натуральное число, кратное каждому общему делителю a и b.