Постепенное конструирование.Индукция

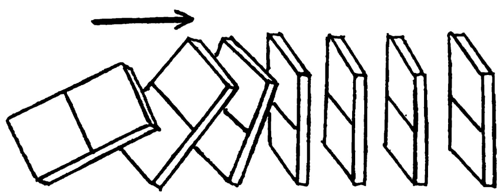
Часть 1. Постепенное конструирование. Нужно понять, как продолжить нашу конструкцию для больших значений.

1. Из клетчатого квадрата 1024×1024 вырезана одна угловая клетка. Докажите, что квадрат можно разрезать на уголки из трёх клеток.

2. Доказать, что квадрат можно разрезать на n квадратов(возможно разных размеров) при любом $n > 5$.

3. В Хогсмиде в обращении есть монеты номиналом 3 галлеонов и 7 галлеонов. Докажите, что любую сумму, начиная с 12 галлеонов, можно набрать монетами представленных номиналов.

4. Докажите, что любой треугольник можно назрезать на 100 треугольников, у каждого из которых хотя бы один угол равен 15° .



Часть 2. Принцип математической индукции.
Пусть дано какое-нибудь логическое высказывание $P(n)$ о произвольном натуральном числе n. Например, это высказывание о правильности какой-нибудь формулы или неравенства, в которых фигурирует натуральное число n. Хотим доказать, что высказывание $P(n)$ верно для любого натурального числа n.
Доказательство состоит из двух частей:
База индукции. Что выполнено условие для $n = 1$.
Индукционный переход. Что из верности высказывания P(n) следует верность высказывания $P(n + 1)$ (еще это называют предположением индукции, шаг индукции и т.п.).

5. Несколько прямых делят плоскость на части. Доказать, что можно раскрасить эти части в красный и в синий цвета так, чтобы соседние части(имеющие общий отрезок границы) были разного цвета.

6. Докажите, что при любом натуральном n число $\overbrace{111..11}^{3^n}$ делится на 3^n.

7. а) В чемпионате по футболу участвуют 64 команды. Докажите, что чемпионат можно провести за 63 дня так, чтобы каждая команда сыграла с каждой и чтобы никакой команде не пришлось играть две игры за день.
б) Теперь команд 2^n, докажите, что можно за $2^n - 1$

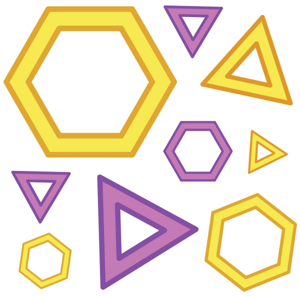
8. Докажите, что число $\frac{1}{2}$ можно представить в виде суммы n различных положительных дробей, у каждой из которых числитель равен 1, а знаменатель — натуральное число.

Дополнительные задания:

9. В некоторой стране каждый город соединён с каждым дорогой с односторонним движением. Докажите, что найдётся город, из которого можно добраться в любой другой.

10. Даны два выпуклых многоугольника $A_1A_2A_3...A_n$ и $B_1B_2B_3...B_n$. Известно, что $A_1A_2 = B_1B_2$, $A_2A_3 = B_2B_3$, ... $A_nA_1 = B_nB_1$ и $n-3$ угла одного многоугольника равны соответственным углам другого. Будут ли многоугольники равны?

11. Петя умеет на любом отрезке отмечать точки, которые делят этот отрезок пополам или в отношении $n : (n+1)$, где n – любое натуральное число. Петя утверждает, что этого достаточно, чтобы на любом отрезке отметить точку, которая делит его в любом заданном рациональном отношении. Прав ли он?



Дополнительные задания:

9. В некоторой стране каждый город соединён с каждым дорогой с односторонним движением. Докажите, что найдётся город, из которого можно добраться в любой другой.

10. Даны два выпуклых многоугольника $A_1A_2A_3...A_n$ и $B_1B_2B_3...B_n$. Известно, что $A_1A_2 = B_1B_2$, $A_2A_3 = B_2B_3$, ... $A_nA_1 = B_nB_1$ и $n-3$ угла одного многоугольника равны соответственным углам другого. Будут ли многоугольники равны?

11. Петя умеет на любом отрезке отмечать точки, которые делят этот отрезок пополам или в отношении $n : (n+1)$, где n – любое натуральное число. Петя утверждает, что этого достаточно, чтобы на любом отрезке отметить точку, которая делит его в любом заданном рациональном отношении. Прав ли он?