Метод математической ндукции

Принцип математической индукции.
Пусть дано какое-нибудь логическое высказывание $P(n)$ о произвольном натуральном числе n. Например, это высказывание о правильности какой-нибудь формулы или неравенства, в которых фигурирует натуральное число n. Хотим доказать, что высказывание $P(n)$ верно для любого натурального числа n.
Доказательство состоит из двух частей:
База индукции. Что выполнено условие для $n = 1$.
Индукционный переход. Что из верности высказывания P(n) следует верность высказывания $P(n + 1)$ (еще это называют предположением индукции, шаг индукции и т.п.).

0.1 Доказать: $1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}$

0.2 Докажите неравенство: $2^n > n$.

1. Доказать, что сумма кубов трех последовательных натуральных чисел делится на 9.

2. Применяя метод математической индукции, докажите равенства:
a) $1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
b) $1^3 + 2^3 + 3^3 + ...n^3 = (1 + 2 + 3 + ... + n)^2$ (теорема Никомаха)
c) $p + (p + 1) + (p + 2) + ... + (p + n) = \frac{(2p+n)(n+1)}{2}$.

3. Про число x известно, что $x + \frac{1}{x} = 2023$. Докажите, что $x^n + \frac{1}{x^n}$ целое.

4. Доказать, что при всех натуральных n выражение a) $n^3 + 5n$ кратно 6; b) $5^n - 4n + 15$ кратно 16; c) $4^n - 1$ кратно 3.

5. На доске написаны два числа 1, 1. Вписав между числами их сумму, мы получим числа 1, 2, 1. Повторив эту операцию ещё раз, получим числа 1, 3, 2, 3, 1. После трёх операций будут числа 1, 4, 3, 5, 2, 5, 3, 4, 1. Какова будет сумма всех чисел на доске после 100 операций?

Дополнительные задачи.

6. Докажите $(1-\frac{1}{4})\cdot(1-\frac{1}{9})\cdot(1-\frac{1}{16})\cdot\ldots\cdot(1-\frac{1}{n^2})=\frac{n+1}{2n}$ для всех $n\geqslant 2$.

7. Найдите сумму $1\cdot 1!+2\cdot 2!+3\cdot 3!+\ldots+2025\cdot 2025!$

8. Докажите неравенство $\frac{(2n)!}{(n!)^2}>\frac{4^n}{n+1}$ для $n>1$.

9. На краю пустыни имеется большой запас бензина и машина, которая при полной заправке может проехать 50 километров. Имеются (в неограниченном количестве) канистры, в которые можно сливать бензин из бензобака машины и оставлять на хранение (в любой точке пустыни). Доказать, что машина может проехать любое расстояние. (Канистры с бензином возить не разрешается, пустые можно возить в любом количестве.)

Дополнительные задачи.

6. Докажите

$$(1-\frac{1}{4})\cdot(1-\frac{1}{9})\cdot(1-\frac{1}{16})\cdot\ldots\cdot(1-\frac{1}{n^2})=\frac{n+1}{2n}$$

для всех $n\geqslant 2$.

7. Найдите сумму $1\cdot 1!+2\cdot 2!+3\cdot 3!+\ldots+2025\cdot 2025!$

8. Докажите неравенство $\frac{(2n)!}{(n!)^2}>\frac{4^n}{n+1}$ для $n>1$.

9. На краю пустыни имеется большой запас бензина и машина, которая при полной заправке может проехать 50 километров. Имеются (в неограниченном количестве) канистры, в которые можно сливать бензин из бензобака машины и оставлять на хранение (в любой точке пустыни). Доказать, что машина может проехать любое расстояние. (Канистры с бензином возить не разрешается, пустые можно возить в любом количестве.)