Остатки

Определение Пусть $a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0$. Разделить a на b с остатком– это значит представить a в виде $a = bq + r$, где $0 < r < |b|$,$r, q \in \mathbb{Z}$. Число q называется неполным частным, а r – остатком.
Утверждение Любое целое число можно поделить на любое другое целое не равное нулю, причём неполное частное и остаток определены однозначно.
Определение Пусть $a, b \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$. Говорят, что a делится на b, если $a = bk$, $k \in \mathbb{Z}$.
Обозначение $a \vdots b$ – a делится на b, $b|a$ – b делит a.

Задача 1. Поделите с остатком: **а)** 45 на 7; -39 на 6; -1 на 3; -3 на -8;
б) $n - 1$ на n, $n > 0$; -1 на n, $n > 0$.

Задача 2. Докажите, что остаток суммы двух чисел равен остатку суммы остатков. Докажите, что остаток произведения равен остатку произведения остатков.

Задача 3. Найдите остаток от деления:
а) $1001 \cdot 1002 \cdot 1003 + 2001 \cdot 2002 \cdot 2003 \cdot 2004$ на 1000;
б) $2016 \cdot 2014 \cdot 2013 + 6333$ на 7;
в) $2015 \cdot 2014 \cdot 2013 + 2017 \cdot 2018 \cdot 2019$ на 2016.

Задача 4. Крыса Тензор очень любит считать остатки, но знает только цифры от 0 до 7. Он хочет узнать, чему равен остаток суммы $1 + 5 + 5^2 + ... + 5^{2017}$ при делении на 6. Помогите крысе!

Задача 5. Найдите остаток при делении числа 3^{2025} на 7.

Задача 6. Докажите, что $n^3 + 2n$ делится на 3 при любом n, а $n^3 + 2$ не делится на 9 при любом n.

Задача 7. На доске были написаны 9 последовательных натуральных чисел. Одно из них стерли, после чего сумма оставшихся оказалась равна 2025. Какое число стерли?

Задача 8. Пусть $a + b + c$ делится на 6. Докажите, что $a^3 + b^3 + c^3$ делится на 6.

Допы

Задача 9. Доказать, что $(2^n-1)^n-3$ делится на 2^n-3 при любом n.

Задача 10. Докажите, что сумма квадратов пяти последовательных натуральных чисел не является точным квадратом.

Задача 11. **а)** Докажите, что существует бесконечно много натуральных чисел, не представимых в виде суммы трех кубов.
б) Докажите, что существует бесконечно много натуральных чисел, не представимых в виде суммы трех квадратов.

Задача 12. ПустьP_n – произведение первых $n>1$ простых чисел. Докажите, что ни одно из чисел
а) P_n-1; **б)** P_n+1
не является полным квадратом.