МЦНМО 8, Занятие 21

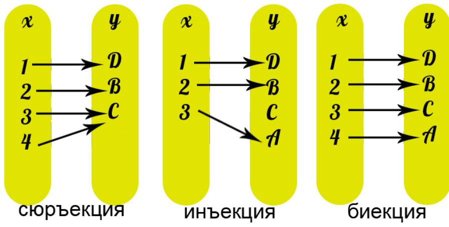
Равномощность

01.03.2025

▷ Пусть у нас есть множества A и B. Поставим в соответствие некоторым элементам множества A по одному элементу множества B (например, можно нарисовать стрелки, как на рисунке ниже).

Соответствие называется *инъекцией,* если разным элементам множества A соответствуют разные элементы множества B (разные стрелки не указывают на одну точку).

Соответствие называется *сюръекцией,* если каждый элемент множества B поставлен в соответствие какому-то элементу множества A (в каждую точку входит стрелка).◁



Задача 1. **а)** На кружок пришли школьники и расселись так, что за каждой партой кто-то сидел (парты двухместные). Что можно сказать про соответствия между множествами школьников и парт, школьников и стульев? **б)** После этого преподаватель отметил каждого школьника в списке плюсиком. Что можно сказать про соотношение школьников и плюсиков?

▷ Между множествами A и B задано *взаимно-однозначное соответствие* (*биекция),* если соответсвие является сюръекцией и инъекцией, другими словами если любому элементу A соответствует ровно один элемент B и наоборот.

Говорят, что множества A и B *равномощны* (имеют одинаковые мощности), если между ними можно установить взаимно-однозначное соответствие. Обозначение: $|A| = |B|$. ◁

Задача 2. Коля нарисовал на окружности 10 чёрных точек и одну красную. Ему потребовалось узнать, чего больше: треугольников, все вершины которых чёрные, или четырёхугольников с тремя чёрными вершинами и одной красной. Помогите Коле, используя новые знания.

Задача 3. **а)** Некоторое число делится на 2, но не делится на 4. Докажите, что количество чётных делителей этого числа равно количеству его нечётных делителей. **б)** Докажите, что натуральное число имеет нечётное число натуральных делителей тогда и только тогда, когда оно является точным квадратом.

Задача 4. Почему число решений уравнения $x + y + z = 33$ в положительных целых числах равно числу решений уравнения $x+y+z = 30$ в неотрицательных целых числах?

Задача 5. Валере и Даше подарили рулон троллейбусных билетов с номерами от 000 000 до 999 999. В порыве радости Валера стал откладывать счастливые билеты, где сумма первых трёх цифр равна сумме последних трёх, а Даша красивые, где сумма всех цифр равна 27. У кого получится кучка больше?

Задача 6. Докажите, что число способов разрезать доску $2 \times (n + 1)$ на доминошки равно числу последовательностей длины n из нулей и единиц, в которых нет двух нулей подряд.

Задача 7. Докажите, что множества **а)** $\mathbb{N}$ и $\{0\} \cup \mathbb{N}$; **б)** $\mathbb{N}$ и $\mathbb{Z}$ равномощны.

Задача 8. Докажите геометрически, что равномощны множества точек: **а)** два отрезка разной длины; **б)** интервал и полуокружность (без концов); **в)** полуокружность и прямая.

Дополнительные задачи

Задача 9. Ровно за минуту до Нового года Дед Мороз кладёт Васе под ёлку одну за другой 10 конфет, за полминуты до Нового года кладёт ещё 10 конфет (тоже по очереди), за четверть минуты – так же кладёт ещё 10, и так далее до бесконечности. Баба Яга за полминуты до Нового Года съедает конфету, которую Дед Мороз положил первой, за четверть минуты до Нового года съедает конфету, которую Дед Мороз положил второй, и т.д. Сколько конфет будет под ёлкой в Новый год?

$\triangleright$ Множество называется *счётным*, если оно равномощно множеству натуральных чисел $\mathbb{N}$. $\triangleleft$

Задача 10. Докажите, что множество конечных подмножеств $\mathbb{N}$ счётно.

Задача 11. Докажите, что множество **а)** пар целых чисел; **б)** $\mathbb{Q}$ счётно.