

▷ На прошлом занятии мы научились пользоваться биекцией, узнали, что  $\mathbb{N}$  равносильно  $\mathbb{Z}$ , а интервал – прямой. Попробуйте использовать эти знания на "практике". ◁

▷ Множество наз. *счётным*, если оно равносильно множеству натуральных чисел  $\mathbb{N}$ . ◁

**Задача 1.** Вы работаете администратором в Бесконечном отеле: в нём есть счётное множество комнат с номерами 1, 2, 3, ... Перед Межгалактическим конгрессом математиков все номера оказались заняты, и к вам приехал запоздавший, но очень известный академик. Вам необходимо его поселить в отдельную комнату, но все гости должны остаться довольными. Как вы поступите?



**Задача 2.** При заселении вы продали каждому математику страховку за 100 рублей от СберГигаБанк. Покажите, как аналитикам банка так перераспределить взносы, чтобы выплатить каждому 1000000 рублей, не привлекая дополнительный капитал.

**Задача 3.** Межгалактический конгресс кончился, все уехали. Но до вас дошли тревожные слухи, что к вам едет бесконечный автобус со школьниками для проведения олимпиады по модулярным формам. Места школьников в автобусе пронумерованы: 1, 2, 3, ..., но могут быть и пустые кресла. Как поселить всех школьников в отдельные комнаты?

**Задача 4.** Слухи были ошибочными: к вам приехало 100 бесконечных автобусов со школьниками. Что можно предпринять в этой ситуации?

**Задача 5.** Беда! Вы поговорили с оргкомитетом олимпиады, и оказалось, что завтра к вам приедет ещё счётное количество автобусов. Что же делать теперь?



**Задача 6.** Олимпиада кончилась, школьники уехали, но внезапно пришла космограмма, что скоро в отель снова приезжают математики. За ними не закреплено место в автобусе, но у каждого есть уникальное удостоверение с положительным рациональным номером (несократимой дробью вида  $\frac{n}{m}$ ) и каждый номер соответствует кому-то. Сможете ли вы поселить их? [Это будет означать, что  $\mathbb{Q}$  равносильно  $\mathbb{N}$ .]

**Задача 7.** После второго нашествия математиков вы собрались в отпуск подальше от этого отеля, но внезапно приехали литераторы на поэтический съезд, у каждого из которых есть любимое уникальное предложение русского языка, причём каждое предложение кто-то считает любимым. Как поселить этих литераторов?

**Задача 8.** а) Вы решили уволиться из отеля. Но в ваш последний рабочий день приехали ИИ-андроиды. У каждого андроида есть любимая уникальная бесконечная последовательность из 0 и 1, и каждая такая последовательность кому-то нравится. Получится ли напоследок заселить андроидов в Бесконечный отель? б) Покажите, что множество любимых последовательностей андроидов равносильно множеству точек на интервале (или отрезке), а значит равносильно и  $\mathbb{R}$ . [Подсказка: Есть бесконечная вниз и вправо таблица из 0 и 1. Как построить строку, которой нет в таблице?]