

▷ *Напоминание:* мнимая единица i — число, квадрат которого равен -1 ; любое комплексное число $z = x + yi$, где x и y — действительные числа; модуль $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$. ◁

Задача 0. Выполните операции: $(2 + 3i) + (4 - i)$; $(1 + 2i) \cdot (3 - i)$; $\frac{5+2i}{1-i}$.

▷ *Гауссово число* — комплексное число $z = a + bi$, где a и b — целые числа; множество всех таких чисел обозначается $\mathbb{Z}[i]$. ◁

▷ *Норма гауссова числа* $z = a + bi$ равна $N(z) = a^2 + b^2$. ◁

▷ *Делимость* — гауссово число w делится на гауссово число z , если найдётся гауссово число u , такое что $w = z \cdot u$. ◁

Задача 1. Найдите и изобразите на плоскости числа $2 + 3i$, $-1 + 4i$, $5 - 2i$; вычислите их нормы.

Задача 2. Докажите: а) $z \cdot \bar{z} = N(z)$; б) $N(zw) = N(z)N(w)$.

Задача 3. Проверьте делимость: делится ли $3 + 5i$ на $1 + 2i$; делится ли $-1 + 7i$ на $2 + i$. В случае делимости найдите частное.

Задача 4. Вспомните определение простого числа в целых числах. Сформулируйте такое же определение для гауссовых чисел: что значит, что гауссово число простое? Какие делители может иметь гауссово простое число?

Задача 5. Найдите все делители гауссова числа $1 + 2i$ и объясните, почему оно простое. Проверьте, является ли гауссовым простым число 5 ; если нет, разложите его на неприводимые множители. А число 7 ?

Задача 6. Разложите число 2 на произведение неприводимых гауссовых чисел. Сколько различных разложений (с точностью до умножения на $\pm 1, \pm i$) существует?

Задача 7. Докажите, что если $N(\alpha)$ — простое число в целых числах, то α является гауссово простым.

Задача 8. Докажите единственность представления простого числа $p = a^2 + b^2$ в виде суммы двух квадратов (с точностью до порядка и умножения на $\pm 1, \pm i$).

