

Деревья. Двудольные графы

1. Докажите, что данные определения дерева эквивалентны:

Дерево — это связный граф, в котором нет циклов.

Дерево — это граф, в котором между любыми двумя вершинами есть ровно один путь.

Дерево — это связный граф, который при удалении любого ребра перестает быть связным.

Дерево — это связный граф, в котором ребер на одно меньше, чем вершин.

В любом связном графе можно выкинуть некоторые ребра так, чтобы осталось дерево. Такое дерево называется остовным деревом исходного графа.

2. Существует ли граф, в котором

а) найдутся два остовных дерева, не имеющих друг с другом общих рёбер;

б) найдутся три остовных дерева, не имеющих друг с другом общих рёбер?

Подвешивание дерева обладает следующими свойствами:

– Ребра могут соединять только вершины из соседних уровней, те не может быть ребра внутри уровня или между несоседними уровнями;

– В каждую вершину, кроме корня, из предыдущего уровня ведёт ровно одно ребро; в частности, все вершины последнего уровня висячие;

– Длина простого пути, соединяющего две данные вершины, не больше суммы номеров уровней этих вершин; любой такой путь идёт сначала «вверх» несколько шагов (возможно, ноль), а потом несколько шагов «вниз».

3. В стране некоторые города соединены двухсторонними авиалиниями, причём из города А в город В нельзя попасть, сделав менее 10 пересадок, а сделав 10 — можно. Докажите, что все авиалинии можно распределить между 11 авиакомпаниями таким образом, чтобы любой маршрут из А в В проходил по авиалиниям, принадлежащим всем 11 авиакомпаниям.



4. В дереве степени всех вершин 1 или 3, максимальная длина пути между двумя вершинами - 10. Найдите наибольшее возможное кол-во вершин в дереве.

Опр. Двудольный граф – граф, все вершины которого можно разбить на две группы так, чтобы никакие две вершины одной группы не были соединены ребром.

5. Докажите *критерий двудольности графа*: Граф является двудольным тогда и только тогда, когда все его циклы имеют чётную длину.

6. Степени всех вершин графа не меньше n , причём в нём нет циклов длины 3, 4, 5. Докажите, что в нём существует $n^2 - n$ вершин, никакие две из которых не соединены ребром.

7. В компании у каждого сотрудника не менее 49 знакомых. Оказалось, что есть два сотрудника, знакомые друг с другом лишь через 9 рукопожатий (то есть кратчайшая соединяющая их цепочка знакомых содержит 8 промежуточных людей). Докажите, что в этой компании хотя бы 200 сотрудников.

8. В школе, где учатся 6 друзей: Вася, Сережа, Женя, Коля, Петя и Миша, работают несколько кружков. Известно, что каждый из кружком посещают ровно 5 друзей, причем Вася посещает больше всех кружков – 8, а Миша меньше всех – 5. Сколько кружков в школе?

