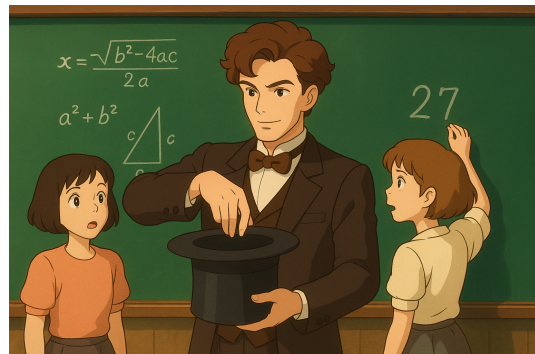


Задача 0. а) Вспомните или придумайте признаки делимости на 2, 4, 5, 10 и обоснуйте их. Признаки делимости на 3 и 9 вспомните или спросите. Их вы докажете в конце листочка.
б) Какая последняя цифра в произведении $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 2025$?

Задача 1. Математик Дарья сказала: «Пароль от местного wi-fi очень красив. Он представляет собой наименьшее натуральное число, составленное из всех возможных цифр и делящееся на 5». Что же это за пароль?

Задача 2. Фокусник Михаил попросил Аполлинарию загадать 10-значное число, кратное 9. После этого он вытащил из своей шляпы сумму цифр суммы цифр её числа, чем удивил всю аудиторию. Как ему это удалось? Что он вытащил из шляпы?

Задача 3. Ксения переставила цифры в числе n и получила в 3 раза меньшее число. После этого она сразу заявила коллегам, что n делится на 27. Как она это поняла?



Задача 4. а) Уставший преподаватель на экзамене по теории чисел предложил трём последним студентам сделку:

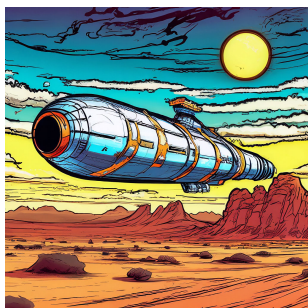
Он загадает оценки каждого из них (a, b, c) по 10-балльной шкале (больше, чем они заслуживают, но не 10), после этого каждый студент назовёт по натуральному числу (x, y, z) , и преподаватель скажет им число $ax + by + cz$. Если они после этого смогут угадать свои оценки, то получат их и наконец смогут пойти домой с чистой совестью. А если нет, отправятся на пересдачу к его самому злому коллеге. Студенты сразу же согласились, не подумав. Что теперь им стоит делать?

б)* На пересдаче его самый злой коллега предложил другую сделку:

Теперь он загадывает произвольные натуральные числа, но студенты могут задать ему несколько вопросов (каждый раз менять свои числа). Если они справятся угадать его числа за 1 вопрос, он поставит им всем 5 из 10, а за каждый следующий вопрос будет снимать по 1 баллу. Наши студенты снова согласились. Какую оценку вы можете им гарантировать?

▷ Запись $\overline{abcd}$ означает натуральное число $d + 10c + 100b + 1000a$. <

Задача 5. В слове $\overline{СССР}$ замените буквы на цифры (одинаковые буквы на одинаковые цифры) так, чтобы полученное число делилось на 15. Найдите все варианты.



Задача 6. Докажите, что $\overline{aaa}$ делится на 37.

Задача 7. К задумчиво витающему в облаках человеку, а им оказался математик Валерий, подлетел робомилиционер. «Вы не обратили внимания на четырёхзначный номер пролетевшего сейчас звездолёта?» – спросил он. «У него был редкостный номер. Второе двузначное число получается из первого перестановкой цифр, а их разность равняется сумме цифр каждого из них!» – таков был ответ математика. Какой же номер был у звездолёта?

Задача 8. а) Из натурального числа $\overline{a_n \dots a_0}$ вычли сумму его цифр $a_0 + \dots + a_n$. Докажите, что разность кратна 9. б) Используя это, докажите признаки делимости на 9 и 3.