Олимпиада

1. 2003 бильярдных шара покрасили в 7 цветов радуги (все цвета использованы). После этого на каждом шаре написали число шаров цвета этого шара. Получилось 2003 числа. Чему может быть равна сумма обратных к ним чисел?

2. На доске написаны два числа. Каждый день старший научный сотрудник Петя стирает с доски оба числа и пишет вместо них их среднее арифметическое и среднее гармоническое. Утром первого дня на доске были написаны числа 2 и 3. Найдите произведение чисел, написанных на доске вечером пятьдесят седьмого дня. (Средним арифметическим чисел a и b называется число $\frac{a+b}{2}$, а средним гармоническим — число $\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$.)

3. Покажите, как любой четырёхугольник разрезать на три трапеции. Параллелограмм можно считать трапецией.

4. Числа p, q и r — простые. Известно, что $p^q + q^p = r$. Найдите p и q. (Единица не является простым числом.)

5. В треугольнике ABC проведены биссектриса AK, медиана BL и высота CM. Треугольник KLM равносторонний. Докажите, что треугольник ABC тоже равносторонний.

6. На плоскости лежит чёрный квадрат со стороной 1м. Имеется 100 красных квадратов со стороной 1м. Можно ли выложить все красные квадраты на плоскости (возможно, с наложениями) так, чтобы чёрный квадрат был полностью покрыт ими, но при убирании любого из красных квадратов какой-нибудь кусок чёрного квадрата становился видимым?