Инварианты

1. На Чудо-яблоне росло 12 бананов и 25 ананасов. Петя срывал с неё плоды по два за раз. Если он срывал два банана или два ананаса, то вырастал ещё один ананас, а если он срывал один банан и один ананас, то вырастал один банан. В конце концов на Чудо-яблоне остался только один плод. Какой?

2. (**а**) На доске написали числа от 1 до 57. Каждую секунду какие-то два числа a и b заменяют на $a + b$. Какое число получится в итоге? Тот же вопрос, если числа a и b заменяют на (**б**) ab; (**в**) $a + b - 1$; (**г**) $ab + a + b$.

3. Хулиган Вася порвал стенгазету, причём каждый кусок он разрывал либо на 4, либо на 10 частей. Могло ли получиться 2003 куска?

4. На 44 деревьях, расположенных по окружности сидят 44 чижа (по одному на дереве). Время от времени два чижа одновременно перелетают на соседние деревья в противоположных направлениях (один по часовой стрелке, другой — против). Докажите, что чижи никогда не соберутся на одном дереве.

5. Болельщик Боря нарисовал расположения игроков на футбольном поле к началу первого и второго тайма. Оказалось, что некоторые игроки поменялись местами, а остальные остались на своих местах. При этом расстояние между любыми двумя игроками не увеличилось. Докажите, что все эти расстояния не изменились.