Логика II

1. Координатная плоскость xOy раскрашена в два цвета: чёрный и белый. Рассмотрим следующие утверждения:

(1) для каждого x существует y, такой что точка (x, y) чёрная;

(2) существует y, такой что для каждого x точка (x, y) чёрная.

Следует ли из первого утверждения второе? А наоборот?

2. x — целое число. Известно, что из следующих пяти утверждений верно ровно три: (1) $x^2 > 4$; (2) $x \leqslant 1$; (3) $x = 0$; (4) $-2 \leqslant 2x \leqslant 3$; (5) $3x > -7$. Чему равно x?

3. Биологи одной из планет Тау Кита установили, что не любое двуногое умеет прыгать и что нет чешуйчатого, у которого две ноги. Докажите, что на этой планете есть животные без чешуи, которые не умеют прыгать.

4. Юннат Вова, наблюдая за пятью ёжиками A, B, C, D и E, выяснил следующее: если A спит, то и B спит; C и D либо оба спят, либо оба не спят; если E спит, то A и D тоже спят; всегда хотя бы один из D и E спит. Однажды, подойдя к клетке, он увидел, что спит ровно один из B и C. Какие ёжики спали в этот момент?

5. (**а**) У электронщика Васи были схемы, реализующие логические связки «и», «или», «не», а также схемы, постоянно выдающие на выходе 0 и 1. Однажды у него закончились схемы «или». Как ему собрать такую схему из схем остальных четырёх типов?

(**б**) В другой раз у него закончились схемы «не». Сможет ли он собрать её из других?

(**в**) Однажды его помощник сделал Очень Сложную Схему (из элементов «и», «или», «не»). Но по ошибке он всюду вместо схем «и» поставил «или», и наоборот. Вася, не разрывая соединений внутри схемы, допаяв ко входам и выходам ещё несколько схем, превратил её в требуемую. Что он сделал?

(**г**) У электронщика Пети не было таких схем, а были только схемы «и-не». Как ему собрать схемы всех пяти типов, которые есть у Васи? (Схемы «ноль» и «единица», конечно, собрать не получится, нужно собрать схему, которая имеет один вход и, независимо от значений на нём, даёт на выходе 0 (соответственно, 1).)

6. В трапеции $ABCD$ ($AD \parallel BC$) $AB = 5$, а $BC = 3$. Какую из сторон: BC или CD, пересекает биссектриса $\angle BAD$?