Графы

Граф — это (конечное) множество точек и соединяющих эти точки отрезков. Точки называют *вершинами*, а отрезки — *рёбрами*. Граф называется *связным*, если любые две его вершины соединены ломанной. Граф называется *полным*, если любые две его вершины соединены ребром. *Степенью* вершины называется число выходящих из неё рёбер.

0. Если граф можно обойти, пройдя по каждому ребру ровно один раз, то в этом графе не более двух нечётных вершин. (теорема Эйлера)

1. (**а**) Можно ли объединить 17 компьютеров в сеть так, чтобы каждый был бы соединён ровно с тремя другими?

(**б**) В некотором государстве n городов и из каждого города выходит ровно 3 дороги. Может ли в этом государстве быть ровно 100 дорог?

2. Пусть в некотором графе n вершин и p рёбер. (**а**) Найдите сумму степеней его вершин. (**б**) Докажите, что число нечётных вершин в этом графе чётно.

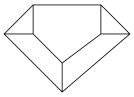

Рис. 1

3. (**а**) Можно ли прогуляться по парку, перейдя через каждый забор ровно один раз? (См. рис. 1.)

(**б**) Гуляя по Кенигсбергу, Л. Эйлер захотел обойти город, пройдя по каждому мосту ровно один раз. Сможет ли он это сделать? (См. рис. 2.)

Рис. 2

4. (**а**) Докажите, что из куска проволоки длиной 120см нельзя, не разламывая её, сделать каркас куба с ребром длины 10см. (**б**) Какое наименьшее число раз придётся сломать проволоку, чтобы изготовить каркас?

5. У царя Дадона было 3 сына. Из его потомков по мужской линии 100 имело по 2 сына, а остальные умерли бездетными. Сколько всего потомков было у царя Дадона?

6. (**а**) Докажите, что при любой раскраске в два цвета полного графа с 6 вершинами в нём найдётся одноцветный треугольник. (**б**) Докажите, что при любой раскраске в три цвета полного графа с 17 вершинами в нём найдётся одноцветный треугольник.