Индукция

Пусть дана цепочка утверждений $A_1, A_2, \dots, A_k, \dots$ Известно, что A_1 верно. Также известно, что утверждения $A_1 \Rightarrow A_2, A_2 \Rightarrow A_3, \dots, A_k \Rightarrow A_{k+1}, \dots$ верны. Т. е. у нас есть пронумерованные утверждения, причём A_k влечёт за собой A_{k+1}. Тогда все утверждения верны, т. к. $A_1 \Rightarrow A_2 \Rightarrow A_3 \Rightarrow \dots \Rightarrow A_n$ для произвольного n.

1. АО “Пень-инвент” решило вырубить реликтовый сосновый лес, но экологи запротестовали. Тогда гендиректор АО “Пень-инвент” всех успокоил, сказав: «В лесу 99% сосен. Мы будем рубить только сосны. После рубки их останется 98% от всех деревьев». Какую часть леса хочет вырубить “Пень-инвент”?

2. В последовательности $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \dots$ каждое следующее число равно сумме двух предыдущих. (**а**) Могут ли в ней оказаться рядом два чётных числа? (**б**) два числа, делящиеся на 13?

3. В комнате с незеркальными стенами расставляют перегородки, одна сторона которых зеркальная, а другая — нет. Докажите, что всегда найдётся комната, в которой нет ни одного зеркала.

4. В некоторой стране каждые два города соединены либо автомобильной, либо железной дорогой. Докажите, что либо из любого города в любой другой можно добраться на автомобиле, либо из любого города в любой другой можно добраться на поезде.

5. Докажите, что для любого натурального n найдётся n-значное число, делящееся на 2^n, и в десятичной записи которого есть только единицы и двойки.

6. (Ханойские башни) Имеется три стержня и несколько колец разного размера. Вначале все кольца нанизаны по порядку на один стержень (внизу — самое большое кольцо). За один ход можно переложить кольцо с одного стержня на другой, но так, чтобы кольцо большего размера не лежало на меньшем. (**а**) Докажите, что можно перенести все кольца с одного стержня на другой. (б) За какое наименьшее число ходов это можно сделать?