Делимость II

1. Бактерии размножаются делением. Каждую минуту каждая бактерия распадается на две. Известно, что одна бактерия заполнит колбу за 20 минут. За сколько минут заполнят колбу две такие бактерии?

2. Пусть n чётно. Докажите, что $n(n+1)(n+2) \,\vdots\, 24$.

3. Перемножили все числа от 1 до 5757. У полученного числа вычислили сумму цифр. У вновь полученного числа снова вычислили сумму цифр, и т. д. В конце получилось однозначное число. Чему оно равно?

4. Докажите, что остаток от деления простого числа на 30 — это 1 или простое число.

5. В тюрьме царя Дадона 100 камер (в каждой камере сидит ровно один пленник). На двери каждой камеры имеется ручка, вращающаяся только в одну сторону. Каждый поворот ручки меняет состояние двери с открытого на закрытое, а с закрытого на открытое. В честь праздника царь Дадон решил освободить часть пленников и накануне послал слугу, который повернул ручку на каждой двери. При этом все двери оказались отперты. После этого пришёл второй слуга и повернул ручку на каждой второй двери. Следующий слуга повернул ручку каждой третьей двери, и т. д. до сотого слуги, который повернул ручку сотой двери. Наконец, наступил праздник, и люди из открытых камер вышли на свободу. Сколько пленников освободил царь Дадон?

6. Найдите $\frac{x+y}{x-y}$, если $x^2+y^2=\frac{5}{2}xy$ и $x, y > 0$.

7. На окружности нарисованы 2003 точки. Одна из них белая, остальные чёрные. Каких многоугольников с вершинами в данных точках больше: имеющих белую вершину или только с чёрными вершинами?