Раскраски

1. В каждой клетке доски 5×5 сидел жук. Затем каждый жук переполз на соседнюю (имеющую общую сторону) клетку. Докажите, что получилась хотя бы одна пустая клетка.

2. Плоскость раскрашена в два цвета. Докажите, что найдутся две точки (**а**) одного цвета; (**б**) разных цветов, расстояние между которыми равно 1м.

3. Прямая раскрашена в два цвета. Докажите, что найдётся отрезок, концы и середина которого раскрашены в один цвет.

4. Можно ли замостить доску 10×10 прямоугольниками 4×1?

5. (**а**) Можно ли раскрасить плоскость в три цвета так, чтобы любая прямая оказалась окрашена ровно в два цвета. (**б**) Тот же вопрос, если требуется, чтобы любые две точки, расстояние между которыми равно 1м, оказались окрашенными в разные цвета?

6. Клетки досках 8×8 раскрашена в четыре цвета. При этом в любом квадратике 2×2 встречаются все четыре цвета. Докажите, что угловые клетки окрашены в различные цвета.

7. Раскрасьте плоскость в семь цветов так, чтобы любые две точки, расстояние между которыми равно 1м, оказались окрашенными в разные цвета.

Задача на дом. Попробуйте уменьшить зазор между результатами задач 5*б* и 7.