

# Алгебраическая топология с алгоритмической точки зрения

А. Скопенков \*

## Содержание

<b>Введение</b>	<b>4</b>
О чем эта книга . . . . .	4
О стиле этой книги . . . . .	5
Общее введение к §1 и §2 . . . . .	6
Общее введение к §4 и §5 . . . . .	6
Соглашения . . . . .	7
Благодарности . . . . .	8
<b>1 Алгоритмические результаты о планарности графов</b>	<b>9</b>
1.1 Линейная вложимость графов . . . . .	9
1.2 Кусочно-линейная вложимость графов . . . . .	11
1.3 Число пересечения и лемма о четности на плоскости . . . . .	13
1.4 Инвариант самопересечения изображения графа . . . . .	16
1.5 Полиномиальный алгоритм распознавания планарности . . . . .	17
1.5.1 Расстановка пересечений . . . . .	17
1.5.2 Расстановки пересечений для разных отображений . . . . .	19
1.5.3 Доказательство леммы 1.5.6 . . . . .	21
1.5.4 Пересечения со знаком . . . . .	22
1.6 Алгоритм распознавания изотопности вложений . . . . .	23
1.7 Приложение: некоторые детали к §1 . . . . .	26
<b>2 Неотъемлемые пересечения для плоскости</b>	<b>30</b>
2.1 Линейные теоремы о неотъемлемых пересечениях . . . . .	30
2.2 Топологическая теорема о двукратных пересечениях . . . . .	31
2.3 Топологическая теорема о многократных пересечениях . . . . .	33
2.4 Приложение: некоторые детали к §2.1 и к §2.2 . . . . .	34
<b>3 Устойчивость самопересечений графов на плоскости</b>	<b>38</b>
3.1 Аппроксимируемость путей вложениями . . . . .	38
3.2 Идея построения препятствия Ван Кампена . . . . .	41
3.3 Препятствие Ван Кампена . . . . .	42
3.4 Другое построение препятствия Ван Кампена * . . . . .	44
3.5 Препятствие Ван Кампена к распроектируемости . . . . .	47

---

\*<https://users.mccme.ru/skopenko>. Московский Физико-Технический Институт, Независимый Московский Университет.

<b>4</b>	<b>Зацепленность в трехмерном пространстве</b>	<b>49</b>
4.1	Зацепленность треугольников . . . . .	49
4.2	Зацепленность по модулю 2 замкнутых ломаных . . . . .	51
4.3	Коэффициент зацепления замкнутых ломаных . . . . .	55
4.4	Изотопность зацеплений . . . . .	57
4.5	Комбинаторная изотопность зацеплений треугольников . . . . .	58
4.6	Сингулярная гомотопность зацеплений . . . . .	59
4.7	Кольца и треугольники Борромео . . . . .	60
4.8	Алгебраическое число пересечений . . . . .	62
4.9	Коэффициент зацепления и зейфертовы цепи . . . . .	64
4.10	Тройной коэффициент зацепления . . . . .	66
4.11	Почти изотопность вложений графа в пространство . . . . .	68
<b>5</b>	<b>Зацепленность в четырехмерном пространстве</b>	<b>71</b>
5.1	Как работать с четырехмерным пространством? . . . . .	71
5.2	Зацепленность симплексов . . . . .	73
5.3	Зацепленность ломаных и двумерных «многогранников» . . . . .	75
5.4	Коэффициенты зацепления как пересечения в $\mathbb{R}^4$ . . . . .	77
<b>6</b>	<b>Реализуемость гиперграфов и комплексов</b>	<b>81</b>
6.1	Наглядные задачи о склейках в пространстве . . . . .	81
6.2	Вложенные семейства треугольников . . . . .	82
6.3	Определения и примеры гиперграфов и комплексов . . . . .	83
6.4	Симплициальная вложимость комплексов . . . . .	84
6.5	Кусочно-линейная вложимость комплексов . . . . .	86
6.6	Алгоритмические результаты о PL вложимости . . . . .	88
6.7	Van Kampen number for $k$ -complexes in $\mathbb{R}^{2k}$ . . . . .	89
6.8	Распознавание $\mathbb{Z}_2$ -вложимости $k$ -комплексов в $\mathbb{R}^{2k}$ . . . . .	91
6.9	Распознавание вложимости $k$ -комплексов в $\mathbb{R}^{2k}$ . . . . .	94
6.10	Almost embeddings, $\mathbb{Z}_2$ - and $\mathbb{Z}$ -embeddings . . . . .	96
6.11	2-комплекс, невложимый в $\mathbb{R}^4$ , но $\mathbb{Z}$ -вложимый в $\mathbb{R}^4$ . . . . .	97
6.12	NP-трудность проблемы вложимости комплексов . . . . .	99
6.13	Вложимость комплексов в плоскость . . . . .	100
6.14	Вложения и зацепленность в пространстве . . . . .	101
6.15	On the number of faces in a $k$ -subcomplex of $2k$ -space . . . . .	104
6.16	Джойн . . . . .	106
6.17	Декартово произведение . . . . .	107
6.18	Embeddability of products and twisted products * . . . . .	110
<b>7</b>	<b>Теоремы о неотъемлемых пересечениях</b>	<b>111</b>
7.1	Линейные теоремы о неотъемлемых пересечениях . . . . .	111
7.2	Топологические теоремы о двукратных пересечениях . . . . .	113
7.3	Топологические гипотезы о многократных пересечениях . . . . .	114
7.4	План доказательства теорем 7.3.2.b и 7.3.5.b . . . . .	116
7.5	Algebraic almost $r$ -embeddings . . . . .	118
<b>8</b>	<b>Применения конфигурационных пространств</b>	<b>120</b>
8.1	Простейшие применения . . . . .	120
8.2	Конфигурационные пространства и вложимость комплексов . . . . .	122
8.3	Конфигурационное пространство наборов $r$ точек . . . . .	125

8.4	Proof of the topological Tverberg Theorem 7.3.2.a for $r$ a prime . . . . .	126
8.5	Почти $r$ -вложения комплексов . . . . .	129
8.6	Конфигурационные пространства и планарность компактов . . . . .	131
<b>9</b>	<b>Гомотопическая классификация отображений</b>	<b>135</b>
9.1	Отображения графа в окружность . . . . .	135
9.2	Отображения графа в проективную плоскость . . . . .	137
9.3	Эквивариантные отображения графа . . . . .	139
9.4	Ретрагируемость комплекса на окружность . . . . .	141
9.5	Отображения комплекса в окружность . . . . .	143
9.6	Отображения комплекса в сферу той же размерности . . . . .	144
9.7	Отображения комплекса в сферу меньшей размерности . . . . .	146
9.8	Отображения комплекса в пространства Эйленберга-Маклейна . . . . .	147
<b>10</b>	<b>Трехмерные утолщения двумерных комплексов</b>	<b>149</b>
10.1	Двумерные утолщения графов . . . . .	149
10.2	Трехмерные утолщения графов . . . . .	150
10.3	Утолщаемость 2-комплексов до 3-многообразий . . . . .	152
10.4	Ложные поверхности и их утолщаемость . . . . .	153
10.5	Доказательство теоремы 10.4.2 об утолщаемости . . . . .	154
10.6	Классификация 3-утолщений ложных поверхностей . . . . .	158
10.7	Утолщения произвольных 2-комплексов . . . . .	158

# Введение

## О чем эта книга

Основная идея этой книги — показать, как алгебраические идеи возникают и работают при решении топологических задач. Основное ее содержание — *алгоритмически мотивированное введение в алгебраическую топологию* (точнее, в теорию гомологий и в теорию препятствий). Дается популярный обзор с основными идеями доказательств, доступными неспециалистам.

Хорошо известно, что существует быстрый (точнее — линейный) алгоритм, определяющий, вложим ли данный граф в плоскость, т.е., можно ли граф расположить на плоскости так, чтобы его ребра не пересекались и не самопересекались (Хопкрофт-Тарджан, 1974). Мы рассмотрим аналогичную задачу для гиперграфов в пространствах произвольной размерности: как распознать вложимость  $n$ -мерного гиперграфа в  $m$ -мерное пространство? Теория гиперграфов (точнее, симплициальных комплексов) — бурно развивающийся раздел математики, возникший на стыке комбинаторики, топологии и программирования.

Все необходимые определения (гиперграф, вложимость, NP-трудность, группы гомологий, препятствие Ван Кампена и т.д.) приводятся в книге. Определения и примеры гиперграфов и симплициальных комплексов приведены в §6. Некоторые результаты о реализуемости гиперграфов приведены в [Sk14] на языке систем точек. Изучаются реализация графов на плоскости (§1). Соответствующий алгоритм обобщается на высшие размерности в п. 6.8, 6.9.

«Понятие препятствия, по-видимому, впервые возникло у Ван Кампена при решении проблемы о вложимости  $n$ -мерных полиэдров в  $\mathbb{R}^{2n}$  для  $n \geq 2$ » [No76]. (Любой  $n$ -мерный полиэдр вложим в  $\mathbb{R}^{2n+1}$  по теореме общего положения.) См. [RS96, §2], [RS99, §2], [RS99', §2], [Fo04], [Sk06, §4]. Но показать основную идею препятствия ван Кампена гораздо проще на языке теории графов: на примере проблем планарности графов (в этом параграфе), рамсеевской теории зацеплений [Sk14] и аппроксимируемости пути вложениями (§3). В §3 приводится элементарное изложение проблемы устойчивости самопересечений пути на плоскости [Mi97], [RS96, §9], [CRS98, §4], [RS98, §1], [ARS02, §4], [Sk16']. На этом маломерном примере мы показываем основную идею построения препятствия ван Кампена к вложимости  $n$ -мерных гиперграфов в  $2n$ -мерное пространство (§6.8, 6.9). Основные определения и результаты о реализуемости гиперграфов приведены в §6. п. 6.8, 6.9, 6.11 и

В §10 написано, как при изучении вложимости гиперграфов в трехмерные многообразия возникают группы когомологий, и как они помогают доказывать красивые математические и алгоритмические результаты.

Приводимые результаты и методы интересны в качестве изучения общих проблем вложимости и заузливания. Согласно Зиману [Ze], классическими проблемами топологии являются следующие.

*Проблема гомеоморфизма.* Когда данные два пространства  $N$  и  $M$  гомеоморфны? Как описать множество гомеоморфических классов многообразий из заданного класса, например, заданной размерности  $n$ ?

*Проблема вложимости.* Какие пространства  $N$  вложимы в  $\mathbb{R}^m$  для данного  $m$ ?

*Проблема заузливания.* Какие вложения  $f, g : N \rightarrow \mathbb{R}^m$  изотопны? Как описать множество изотопических классов вложений  $N \rightarrow \mathbb{R}^m$ ?

Идеи и методы, применяемые для изучения проблем вложимости и заузливания, применяются и для других проблем топологии и ее приложений.

Обновляемая версия поддерживается на [www.mscme.ru/circles/oim/algord.pdf](http://www.mscme.ru/circles/oim/algord.pdf).

## О стиле этой книги

Основные идеи представлены на «олимпиадных» примерах: на простейших частных случаях, свободных от технических деталей, и со сведением к необходимому минимуму научного языка. За счет этого и текст становится доступным для начинающих, и удается быстро добраться до интересных сложных и важных результатов, методов и теоретических идей. Таким образом, многие из приведенных идей работают для более общих случаев. Мы не тратим время читателя на несложные обобщения. Их легко придумать или найти в литературе. Трудно именно *применить* общую теорию для ярких результатов, сформулированных вне этой теории, когда неизвестно заранее, какую теорию нужно применять (и вообще, можно ли хоть какую-то теорию применить).

*'Listeners are prepared to accept unstated (but hinted) generalizations much more than they are able, on the spur of the moment, to decode a precisely stated abstraction and to re-invent the special cases that motivated it in the first place.'*<sup>1</sup> [?]

*'The preceding theorem generalizes to many situations. In fact, there may not actually be an optimal generalization in the sense that no matter what generalization is given, someone could produce a more general one. One of the advantages of being an understander rather than a theorem quoter is that one may be able to obtain approaches to a wide variety of theorems some of which may not even have been formulated yet.'*<sup>2</sup> [Bi83]

Более простой материал приводится, чтобы сделать естественным и доступным более сложный. Попытка начинать с более простого (например, с частных случаев) повышает самостоятельность — а, значит, глубину и надежность — освоения материала. Проще самому доказать частный случай, самому продумать переход от частного к общему, чем самому сразу доказать общий случай. Самостоятельно придуманное надежнее запоминается и легче модифицируется. Кроме того, обычно на частном случае проще отловить и исправить ошибки. Подробнее см. [ZSS, §11.2].

Как правило, мы приводим *формулировку* красивого или важного утверждения *перед* последовательностью определений и результатов, составляющих его *доказательство*.<sup>3</sup> В таких случаях для доказательства утверждения требуется часть дальнейшего материала. Об этом указано после формулировки утверждения. Некоторые результаты приведены без доказательств, тогда даются ссылки вместо указаний. Если к утверждению (или задаче) не приведено ни доказательство, ни ссылка на него, то оно несложно. Основные результаты называются «теоремами», менее важные результаты — «утверждениями», важные вспомогательные результаты — «леммами».

В тексте есть небольшое количество задач (полезно рассматривать и утверждения как задачи). Изучение путем решения задач характерно для серьезного обучения математике, см. [HC19, §1.1], [ZSS, §1.2] и данные там ссылки. Оно продолжает древнюю культурную традицию.<sup>4</sup> Если условие задачи является формулировкой утверждения,

---

<sup>1</sup>Слушатели в гораздо большей степени готовы воспринимать не сформулированные (но упомянутые) обобщения, чем способны «навскидку» раскодировать явно сформулированную абстракцию и воспроизвести те конкретные примеры, которые изначально ее мотивировали.

<sup>2</sup>Предшествующая теорема имеет многочисленные обобщения. В действительности, «наилучшего» обобщения может и не быть, в том смысле, что для каждого обобщения кто-то сможет найти еще более общее. Одним из преимуществ читателя, ориентированного на понимание сути, а не просто на цитирование теорем, является способность получать подходы к широкому спектру теорем, некоторые из которых могут быть даже еще не сформулированы.

<sup>3</sup>Часто происходит обратное: формулировки красивых результатов и важных проблем, ради которых была придумана теория, приводятся только *после* продолжительного изучения этой теории (или не приводятся совсем). Это развивает представление о математике как науке, изучающей немотивированные понятия и теории. Такое представление принижает ценность математики.

<sup>4</sup>Например, послушники дзенских монастырей обучаются, размышляя над загадками, данными им наставниками. Впрочем, эти загадки являются скорее наводящими на размышления парадоксами, а

то в задаче требуется это утверждение доказать (и тогда в ссылках мы называем это утверждение утверждением, а не задачей). Краткие указания к задачам приводятся сразу, более длинные в конце параграфа. *Загадкой* называется не сформулированный четко вопрос; здесь нужно придумать и четкую формулировку, и доказательство. Если номер задачи помечен звездочкой, то эта задача посложнее соседних.

Определения важных понятий даны **жирным шрифтом**, чтобы их было проще найти. *Разделы и задачи, отмеченные звездочкой, а также замечания*, не используются в дальнейшем.

Начинать изучение книги можно с любого параграфа (поскольку даже пп. 6.1 и 9.1-9.3 интересны, но не используют предыдущего материала). Пункты, отмеченные звездочкой (и весь §3) можно пропустить без ущерба для понимания остального материала. Параграф 1 используется в §3 и формально не используется в остальных параграфах. Все параграфы, кроме §1, почти независимы друг от друга.

## Общее введение к §1 и §2

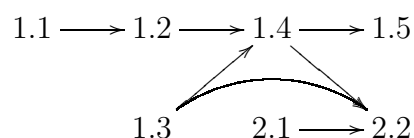
Основные результаты данных параграфов следующие:

- полиномиальный алгоритм распознавания планарности графов (утверждение 1.5.8) и объяснение, как его придумать (п. 1.5);
- элементарные формулировки теорем Радона и Тверберга для плоскости (линейных и топологических) 2.1.1, 2.2.2, 2.1.4, 2.3.1, а также элементарное доказательство теоремы Радона (§2.1).

Элементарные доказательства, которые мы приводим, не упоминают конфигурационных пространств и кохомологических препятствий. Однако основное содержание этого текста — *введение в алгебраическую топологию* (точнее, в теорию конфигурационных пространств и кохомологических препятствий) *мотивированное алгоритмически, комбинаторными и геометрическими задачами*. Мы представим некоторые идеи решения топологической гипотезы Тверберга, поставленной в 1966 г. и решенной недавно, см. обзор [Sk16] и ссылки в нем.

Два вышеуказанных направления связаны между собой понятием *числа ван Кампена*, обобщения которого требуются для обоих пунктов. Идея более общего *препятствия (=инварианта) ван Кампена* нужна и для придумывания полиномиального алгоритма распознавания планарности, и для формулировки теоремы Езайдына.

Subsections of §1 and §2 can be read independently on each other, and so in any order. In one subsection we indicate relations to other subsections, but these indications can be ignored. In one subsection we may use a definition or a result from the other, but then only a specific shortly stated definition or result. However, we recommend to read subsections in any order consistent with the following diagram



## Общее введение к §4 и §5

Понятие коэффициента зацепления двух непересекающихся замкнутых ломаных в пространстве — одно из важнейших базовых понятий для топологии и ее приложений к физике. То же справедливо для «тройного коэффициента зацепления» трех попарно

---

не задачами. См. подробнее [Su].

непересекающихся замкнутых ломаных. Важные применения этих понятий — доказательства нерасцепляемости ломаных. Говоря неформально, коэффициент зацепления — количество оборотов, которые одна ломаная делает вокруг другой. Это понятие является трёхмерной версией количества оборотов ломаной вокруг точки (§2.3). Мы приводим строгое определение, удобное для вычисления на компьютере (§4.3).

Сначала зацепленность изучается для простейшего случая, когда обе ломаные являются трехзвенными (§4.1). Эта конструкция обобщается до зацепленности по модулю 2 произвольных ломаных (§4.2). Определение коэффициента зацепления, приведенное в §4.3, отличается от обычно излагаемого на математических кружках, которое использует проекцию ломаных на плоскость (см. утверждения о проекции 4.2.7 и 4.3.5, а также [Sk20u, §§4,8]). Приведенное определение более естественно: оно

- не требует для доказательства его важнейшего свойства (изотопической инвариантности) технически непростого утверждения [Sk20u, теорема Рейдемейстера 3.4];
- позволяет продемонстрировать некоторые базовые идеи теории гомологий на элементарном языке, доступном неспециалистам, на примере доказательства свойств коэффициента зацепления.

Неформально, две непересекающиеся замкнутые ломаные *изотопны*, если одна может быть преобразована в другую деформацией, при которой эти ломаные остаются непересекающимися. Строгое определение дается сначала для «комбинаторной» формализации (§4.5), а затем для «топологической» (§4.4).

В пространстве можно зацепить три кольца, чтобы их нельзя было расцепить, но после разрезания любого из них они расцеплялись. Аналогичный пример есть и для большего числа колец. Эти примеры приводятся и обсуждаются в §4.7 (плоский аналог приведен в [Sk20, задача 3.2.2]). Для доказательства нерасцепляемости вводится свойство зацепленности по модулю 2 трех замкнутых ломаных (никакие две из которых не зацеплены по модулю 2). Это свойство и «тройной коэффициент зацепления» (число Милнора) трех замкнутых ломаных определяются в §4.10. Приводимые определения используют тройные пересечения некоторых поверхностей, ограниченных этими ломаными. Более точно, используются комбинаторные аналоги таких поверхностей, т.е. *зейфертовы цепи* (§4.9). Для их определения необходим новый взгляд на «двойной» коэффициент зацепления — основы комбинаторной (алгебраической) теории пересечений в пространстве (§4.8).

Многие области знания и техники — прежде всего математика, программирование и физика — часто работают с многомерным пространством. Изучение §5.1 позволит освоить базовые навыки такой работы: развивать пространственное воображение и интуицию, а также проверять их строгими рассуждениями. Это полезно для последующего изучения компьютерной графики и необходимой для нее базы из линейной алгебры и геометрии. В §5.1 не требуются предварительных знаний по стереометрии. Полезны пространственное воображение и умение решать системы линейных уравнений (см. задачу 5.1.2). В §5.2–§5.4 приводятся простейшие аналоги предыдущего материала для зацепленности в четырехмерном и в многомерном пространстве.

В этих параграфах «трехмерное пространство  $\mathbb{R}^3$ » коротко называется «пространством». Если не оговорено противное, то фигуры рассматриваются в пространстве, и слова «в пространстве» часто пропускаются.

## Соглашения

Под *k точками на плоскости (в пространстве)* подразумевается *k* попарно различных точек. Мы часто обозначаем точки просто числами, а не буквами с числовыми индексами. Под *треугольником  $\Delta$*  подразумевается часть плоскости, ограниченная замкнутой

трехзвенной ломаной (контуром)  $\partial\Delta$ . Контур треугольника  $T$  обозначается через  $\partial T$ . «Кусочно-линейный» сокращается до «PL». Для конечного множества  $S$  мы обозначаем через  $|S|$  количество элементов в множестве  $S$ , а через  $|S|_2$  четность количества элементов.

## Благодарности

Книга написана по материалам спецкурсов и докладов на мехмате МГУ, на ФИВТ МФТИ, в НМУ, в летней школе «Современная математика» (до 2015 г.) и Московской выездной олимпиадной школе.

Благодарю С. Аввакумова, Э. Алкина, П. Благоевича, И. Богданова, У. Вагнера, А. Видинеева, С. Дженжера, Р. Живалевича, И. Жильцова, Т. Зайцева, П. Захарова, А. Еннэ, Р. Карасева, Ю. Макарычева, И. Матушека, А. Мирошникова, Е. Морозова, А. Рябичева, М. Скопенкова, Г. Соколова, М. Танцера, Р. Фулека, Т. Хархалупа, Г. Челнокова и М. Шефера за полезные обсуждения. Благодарю Е. Морозова и С. Дженжера за перевод части текста на русский язык. Компьютерные версии многих рисунков подготовлены издательством МЦНМО.



# 1 Алгоритмические результаты о планарности графов

Напомним строгие определения некоторых понятий теории графов.

**Графом** (конечным)  $(V, E)$  называется конечное множество  $V$  вместе с набором  $E \subset \binom{V}{2}$  его двухэлементных подмножеств (т. е. неупорядоченных пар несовпадающих элементов). (Общепринятый термин для этого понятия — *граф без петель и кратных ребер* или *простой граф*.)

Элементы данного конечного множества называются **вершинами**. Мы считаем, что  $V = \{1, 2, \dots, |V|\}$ , если не оговорено другое.

Пары вершин из  $E$  называются **ребрами**. Ребро, соединяющее вершины  $i$  и  $j$ , обозначается через  $ij$  (но не через  $(i, j)$ , чтобы не спутать с упорядоченной парой вершин).

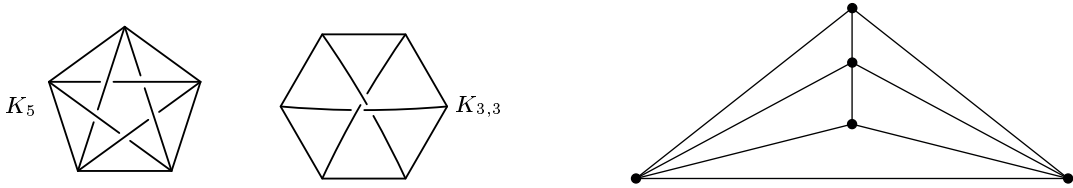


Рис. 1.0.1: (Слева) Непланарные графы  $K_5$  и  $K_{3,3}$ . (Справа) Изображение графа  $K_5$  без одного из ребер на плоскости

Граф с  $n$  вершинами, любые две из которых соединены ребром, называется *полным* и обозначается  $K_n$ . Через  $K_{m,n}$  обозначается *полный двудольный граф* с долями из  $m$  и из  $n$  вершин: в нем соединены ребрами все пары вершин из разных долей, и только они. См. рис. 1.0.1.

Говоря нестрого, граф реализуем на плоскости, если его можно «без самопересечений» нарисовать на плоскости. В п. 1.1 и 1.2 мы представляем две формализации этого понятия: линейную вложимость и планарность (т.е. кусочно-линейную вложимость). (Они оказываются эквивалентными по теореме Фари 1.2.1; их многомерные версии не эквивалентны, см. замечание 6.5.1.) Важны обе формализации. Они вводятся независимо друг от друга, поэтому п. 1.1 формально не используется далее (кроме простого утверждения 1.1.1.b, облегчающего доказательство леммы 1.4.3, и замечания 1.1.4). Однако перед более сложным изучением планарности может быть полезно изучить линейную вложимость.

## 1.1 Линейная вложимость графов

**Утверждение 1.1.1.** <sup>5</sup> (a) (Ср. с теоремами 1.4.1 и 2.1.1) Из любых 5 точек плоскости можно выбрать две такие непересекающиеся пары точек, что отрезок, соединяющий точки первой пары, пересекает отрезок, соединяющий точки второй пары.

(b) (cf. Proposition 2.1.2 and Lemma 1.4.3) Если среди 5 точек плоскости никакие три не лежат на прямой, то количество точек пересечения внутренностей отрезков, соединяющих данные точки, нечетно.

(c) (cf. Remark 1.4.4.b) Для любых 6 точек плоскости, разбитых на две тройки, существуют два пересекающихся отрезка, не имеющие общих вершин, каждый из которых соединяет точки из разных троек.

(d) Среди 6 точек плоскости никакие три не лежат на прямой. Эти 6 точек разбиты на две тройки. Тогда количество точек пересечения внутренностей отрезков, соединяющих точки из разных троек, нечетно.

<sup>5</sup>Это «линейные» версии непланарности графов  $K_5$  и  $K_{3,3}$ . Но доказываются они проще, ибо не требуют леммы о четности 1.3.3.b.

Утверждения 1.1.1.ab легко доказываются с помощью рассмотрения выпуклой оболочки точек (см. определение в §2.1). В п. (c,d) аналогичный перебор слишком велик, поэтому лучше использовать идею следующего доказательства п. (b), которая также полезна для лемм 1.4.3 и 1.5.6 и их многомерных аналогов.

*Другое доказательство утверждения 1.1.1.b.* Обозначим через

- $f$  набор пяти точек на плоскости, никакие три из которых не лежат на прямой, и
- $v(f)$  — нужную четность числа точек пересечений.

For the set  $f_0$  of 5 points from Figure 1.0.1, left, we have  $v(f_0) = 1$ . Hence it suffices to prove that  $v(f)$  is not changed if we change one point keeping the remaining 4 fixed, so that new 5 points are in general position. Пусть  $L \in f$ ,  $L' \in \mathbb{R}^2 - f$  и в множестве  $f' := (f - \{L\}) \cup \{L'\}$  никакие три точки не лежат на прямой.

First we prove that  $v(f) = v(f')$  when никакие три точки из  $f \cup \{L'\}$  не лежат на прямой. Для  $A \in f - \{L\}$  и  $X \subset \mathbb{R}^2$  обозначим через  $X^*$  четность количества точек пересечения множества  $X$  и контура треугольника с вершинами из  $f - \{L, A\}$ . Тогда

$$v(f') - v(f) = \sum_{A \in f - \{L\}} (LA^* - L'A^*) = \sum_{A \in f - \{L\}} L'L^* = 0.$$

Здесь второе равенство следует из того, что  $\partial(LL'A)^* = 0$  (по очевидной лемме о четности 1.3.3.a). Последнее равенство следует из того, что для каждого подмножества  $\{P, Q\} \subset f - \{L\}$  существует ровно два треугольника с вершинами из  $f - \{L\}$ , которые содержат отрезок  $PQ$ , следовательно, число  $|L'L \cap PQ|$  «входит» ровно в два слагаемых из суммы.

Now we prove that  $v(f) = v(f')$  in general. There exists a point  $L''$  such that both  $f \cup \{L''\}$  and  $f' \cup \{L''\}$  are general position sets. Then  $v(f) = v((f - \{L\}) \cup \{L''\}) = v(f')$  by the previous case.  $\square$

**Теорема 1.1.2** (Общего положения; см. доказательство в §1.7). *Для любого  $n$  существуют такие  $n$  точек в трехмерном пространстве, что отрезки, их соединяющие, не имеют общих внутренних точек.*

*Доказательство.* <sup>6</sup> Набор точек в пространстве называется набором (слабого) *общего положения*, если никакие четыре из них не лежат в одной плоскости. В следующем абзаце мы докажем, что *для каждого  $n$  существует  $n$  точек общего положения в пространстве.* <sup>7</sup>

Используем индукцию по  $n$ . База  $n = 1$  очевидна. Для доказательства шага индукции предположим, что есть  $n$  точек общего положения в пространстве. Существует конечное число плоскостей, проходящих через тройки этих  $n$  точек. Значит, в пространстве существует точка, не принадлежащая ни одной из этих плоскостей. Добавим эту точку к имеющимся  $n$  точкам. Так как она не лежит в одной плоскости ни с какой тройкой из  $n$  имеющихся точек, то полученные  $n + 1$  точек находятся в общем положении. Шаг индукции обоснован.

Выберем  $n$  точек общего положения в пространстве. Если какие-то два отрезка, соединяющие эти точки, не имеют общих концов, но пересекаются, то четыре конца

---

<sup>6</sup>Вот идея другого доказательства (кусочно-линейного аналога) теоремы. Нарисуем данный граф (возможно, с самопересечениями) на плоскости так, чтобы ребра не самопересекались. Если образовались точки пересечения (кроме вершин) более чем двух ребер, то подвинем некоторые ребра так, чтобы остались только двукратные точки пересечения. «Поднимем» одно из каждых двух пересекающихся ребер в пространство так, чтобы каждое пересечение пропало.

<sup>7</sup>Чтобы осознать нетривиальность этого факта, попробуйте придумайте алгоритм, который по числу  $n$  строит  $n$  точек общего положения в пространстве. Ср. задачу 1.3.2.

*Идея алгебраического доказательства (и алгоритма).* Возьмем точки  $A(t) = (t, t^2, t^3)$  для  $t = 1, \dots, n$ .

этих отрезков лежат в одной плоскости. Если какие-то два отрезка, соединяющие эти точки, имеют общий конец и другую общую точку, то три конца этих двух отрезков лежат на одной прямой. Противоречие.  $\square$

Граф  $(V, E)$  называется **линейно** (симплициально) **вложимым в плоскость**, если существует  $|V|$  точек на плоскости, соответствующих вершинам, таких, что никакой отрезок, соединяющий пару (точек) из  $E$ , не пересекает внутренность никакого другого такого отрезка.<sup>8</sup> Например,

- граф  $K_4$  и даже граф  $K_5$  без ребра линейно вложимы в плоскость (рис. 1.0.1 справа;

- ни граф  $K_5$ , ни граф  $K_{3,3}$  не вложим линейно в плоскость (утверждение 1.1.1.ас).

Линейная вложимость графа в трехмерное пространство определяется аналогично случаю плоскости. Любой граф линейно вложим в трехмерное пространство ввиду теоремы общего положения 1.1.2.

**Утверждение 1.1.3** ([Та, гл. 1 и 6]). *Существует алгоритм распознавания линейной вложимости графов в плоскость, линейный по количеству вершин  $n$ .*

**Замечание 1.1.4.** (а) Строгое определение алгоритма непростое, поэтому мы не приводим его. Этот текст можно изучать, основываясь на интуитивном представлении об алгоритме. Более аккуратно, сформулированное утверждение означает, что существует алгоритм вычисления функции из множества всех графов в множество  $\{0, 1\}$ , которая сопоставляет графу 0, если он линейно вложим в плоскость, и 1 иначе. Аналогично формализуются другие утверждения об алгоритмах в этом тексте.

(б) Линейность алгоритма означает существование такого числа  $C$ , что для любого графа число шагов в алгоритме не превосходит  $Cn$ . Поскольку для плоского графа с  $n$  вершинами и  $e$  ребрами выполнено  $e \leq 3n - 6$ , и поскольку существуют графы, линейно вложимые в плоскость, для которых  $e = 3n - 6$ , то «сложность» по количеству ребер «такая же», как по количеству вершин.

(с) Существование алгоритма в утверждении 1.1.3 следует из того, что для любого  $n$  существует алгоритм построения всех  $n$ -элементных множеств на плоскости с точностью до *изотопности*. Два подмножества  $L, M \subset \mathbb{R}^2$  называются *изотопными*, если существует биекция  $f: L \rightarrow M$  такая, что точки  $A, B, C, D \in L$  образуют выпуклый четырехугольник тогда и только тогда, когда точки  $f(A), f(B), f(C), f(D) \in M$  образуют выпуклый четырехугольник.

(д) Существование линейного алгоритма в утверждении 1.1.3 следует из теоремы Фари 1.2.1 и утверждения 1.2.2. Критерий линейной вложимости графа в плоскость следует из теоремы Фари 1.2.1 и любого критерия планарности (например, теоремы Куратовского 1.2.3.е).

## 1.2 Кусочно-линейная вложимость графов

Граф  $(V, E)$  называется **планарным** (или кусочно-линейно вложимым в плоскость), если на плоскости существует

- набор  $|V|$  точек, соответствующих вершинам графа, и
- набор несамопересекающихся ломаных, каждая из которых соединяет принадлежащую  $E$  пару точек, причем никакая из ломаных не пересекает внутренность другой ломаной.<sup>9</sup>

<sup>8</sup> Мы не требуем, чтобы никакая изолированная вершина не лежала ни на одном из отрезков, потому что этого всегда можно добиться.

<sup>9</sup>Тогда любые две ломаные либо не пересекаются, либо пересекаются только по их общей концевой вершине. См. сноску 8 и эквивалентное определение планарности в начале п. 1.5.1.

Например, графы  $K_5$  и  $K_{3,3}$  (рис. 1.0.1) не планарны по теореме 1.4.1 и замечанию 1.4.4.b. Заметим, что обычно приводимый вывод непланарности графа  $K_5$  из формулы Эйлера близок к порочному кругу, см. [Sk20, Замечание в решении задачи 1.3.2.a].

Следующий результат показывает, что любой планарный граф можно нарисовать без самопересечений на плоскости так, что каждое ребро будет отрезком.

**Теорема 1.2.1** (Фари). *Если граф планарен, то он линейно вложим в плоскость.*

Историческая справка (включая перечисление математиков, которым приписывается данный результат) и доказательства содержатся в [Та, гл. 6].

**Утверждение 1.2.2.** *Существует алгоритм распознавания планарности графов, линейный по количеству вершин  $n$ .*

**Замечание 1.2.3.** (а) Алгоритмы распознавания планарности графов получаются

- из утверждения 1.1.3 и теоремы Фари 1.2.1, или
- из приведенной в (е) теоремы Куратовского (см. детали в [Та, гл. 1 и 6]), или
- при помощи *утолщений* [Sk20, §1].

Однако эти алгоритмы медленно работают, т.е. являются «экспоненциальными» (при больших  $n$  имеют более, чем  $2^n$  шагов для графов с  $n$  вершинами) или «галактическими» (см. [Bi21, замечание 1.2b]).

(б) Алгоритм из утверждения 1.2.2 основан на том, что

- граф планарен тогда и только тогда, когда каждый его *блок* (*компонента трехсвязности*) планарен;
- *трехсвязный* граф допускает не более одного вложения в плоскость.

См. детали в [HT74] и (более простое изложение) в [BM04].

(с) В §1.5 приводится алгоритм распознавания планарности графов, который (в отличие от алгоритмов из (а,b)) обобщается

- на высшие размерности (ср. теорема 6.6.1);
- на *целочисленные и по модулю 2 вложения* графов в поверхности (см. [Sc13, FK19, Bi21]; исторические комментарии см. в [Sc13, замечание после теоремы 1.18] и [Sk18, замечание 1.6.6]);
- на многократные пересечения (см. [MW15, AMS+, MW16, Sk17] и обзор [Sk16]).

Этот алгоритм полиномиален по количеству вершин  $n$ . (Полиномиальность означает существование таких чисел  $C$  и  $k$ , что для любого графа число шагов в алгоритме не превосходит  $Cn^k$ .) Построение алгоритма использует эквивалентность планарности и разрешимости некоторой системы линейных уравнений над  $\mathbb{Z}_2$  (предложение 1.5.8 ниже). А для распознавания разрешимости системы  $N$  линейных уравнений с коэффициентами в  $\mathbb{Z}_2$  с не более чем  $N$  неизвестными существует полиномиальный по  $N$  алгоритм (который строится с помощью *исключения неизвестных*, см. детали в [CLR, Vi02]).

(д) Определение гомеоморфности графов приведено, например, в [GDI, §2.4], [Sk20, п. 5.3 бумажной версии или замечание 5.2.1.a электронной]. Граф планарен тогда и только тогда, когда некоторый граф, гомеоморфный ему, линейно вложим в плоскость.<sup>10</sup>

(е) (теорема Куратовского) *Граф планарен тогда и только тогда, когда он не содержит подграфа, гомеоморфного графу  $K_5$  или  $K_{3,3}$  (рис. 1.0.1).*

Историческая справка (включая перечисление математиков, которым приписывается данный результат) и доказательства содержатся в [Th81]. Сравнительно простое доказательство этой теоремы приведено, например, в [Ma97], [GDI, §2.9].

<sup>10</sup> Действительно, если граф планарен, то каждое ребро — это ломаная. Отметив вершины каждой ломаной как вершины нового графа, а звенья каждой ломаной как ребра нового графа, получим требуемое. Доказательство в другую сторону аналогично.

### 1.3 Число пересечения и лемма о четности на плоскости

Интересные приложения этого пункта приведены далее; приложения к *теореме Жордана* и алгоритмическим вопросам приведены в [Sk20, §1.4] (теорема Жордана там и сформулирована). Изучение этого пункта можно начать с доказательства утверждений 1.3.5, которые ярко иллюстрируют нетривиальность материала.

**Утверждение 1.3.1.** *Если никакие три из вершин двух плоских ломаных не лежат на одной прямой, то ломаные пересекаются в конечном числе точек.*

*Доказательство.* Ломаная является объединением конечного числа отрезков. Если никакие три вершины двух отрезков не лежат на одной прямой, то эти отрезки пересекаются в конечном числе точек. Поскольку  $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$ , то утверждение доказано.  $\square$

Множество точек на плоскости находится в *общем положении*, если

- никакие три из них не лежат на одной прямой, и
- никакие три отрезка с концами в этих точках не имеют общей внутренней точки.

Например,

- множество всех точек окружности не находится в общем положении (ибо любые три диаметра пересекаются в одной точке);
- множество всех точек вида  $(t, t^2)$ , где  $t \in (0, 1)$ , не находится в общем положении («кривая моментов»; ибо некоторые три хорды пересекаются в одной точке);
- множество вершин правильного  $(2k + 1)$ -угольника находится в общем положении для любого  $k$  (докажите или см. [ZSS, §4.8]).

Далее вместо фразы «множество точек находится в общем положении» мы пишем «точки находятся в общем положении».

**Задача 1.3.2.** (a) Конечное число прямых не покрывает плоскость.

(b) Для любого  $n$  существуют  $n$  точек общего положения на плоскости.

*Hint.* (a) Since the plane has infinitely many points, it has infinitely many lines. Hence there is a прямая  $l$ , отличная от данных. Ей принадлежит бесконечное число точек. Каждая прямая пересекает  $l$  не более чем в одной точке. Следовательно, найдется точка на  $l$ , не принадлежащая ни одной из данных прямых.

(b) Индукция по  $n$ . База для  $n = 1$  очевидна. Переход следует из п. (a).

**Лемма 1.3.3** (о четности). (a) *Если из шести вершин двух треугольников на плоскости никакие три не лежат на прямой, то контуры этих треугольников пересекаются в четном числе точек.*

(b) *Если вершины двух замкнутых плоских ломаных находятся в общем положении, то ломаные пересекаются в четном числе точек.*<sup>11</sup>

(c) *Если никакой отрезок одной из двух замкнутых плоских ломаных не проходит через вершину другой, то количество пар  $(a, b)$  пересекающихся отрезков  $a$  и  $b$  первой и второй ломаной, соответственно, четно.*

*Доказательство.* (a) Пересечение первого треугольника и контура второго является объединением конечного числа невырожденных ломаных. Точки пересечения контуров суть концы этих ломаных. Их число четно. Из этого и следует нужный факт.

<sup>11</sup>Это нетривиально, поскольку ломаные могут иметь самопересечения, и поскольку теорема Жордана нетривиальна. Выводить лемму о четности из теоремы Жордана или формулы Эйлера неразумно, ибо их доказательства используют лемму о четности или близкое утверждение.

Будьте осторожны: утверждение [Pr04, задача 1.2] неверно для «восьмерки» и контура треугольника, проходящего через точку самопересечения «восьмерки».

(а) *Набросок другого доказательства.* Сначала докажите, что трехзвенная ломаная разбивает плоскость. В отличие от теоремы Жордана, это доказывается без использования леммы о четности. Контур одного треугольника заходит *внутрь* другого треугольника столько же раз, сколько выходит *наружу*. (Поэтому если одна из ломаных трехзвенная, то п. (b) доказывается аналогично п. (а).)

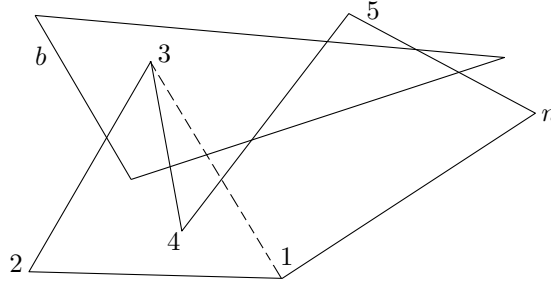


Рис. 1.3.1: Доказательство леммы о четности 1.3.3.b

(b) Докажем лемму при помощи индукции по сумме количеств звеньев ломаных. База — п. (а). В доказательстве шага обозначим через  $B_1 \dots B_k$  замкнутую ломаную с последовательными вершинами  $B_1, \dots, B_k$ . Можно считать, что в первой ломаной более трех звеньев. Обозначим ее через  $A_1 \dots A_n$ , а вторую ломаную через  $b$ . Тогда (рис. 1.3.1)

$$|A_1 A_2 A_3 \dots A_n \cap b| \equiv_2 |A_1 A_2 A_3 \cap b| + |A_1 A_3 A_4 \dots A_n \cap b| \equiv_2 0.$$

Здесь второе сравнение следует из базы и предположения индукции.

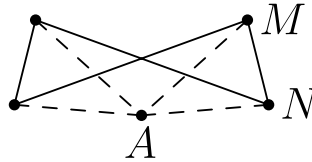


Рис. 1.3.2: Идея сингулярного конуса

(с) Аналогично п. (b) уже не получится. Приведенное ниже доказательство основано на идее непрерывного движения ломаной на бесконечность [BE82, §5], коротко формализованной при помощи *сингулярного конуса*. Оно позволяет продемонстрировать одну из базовых идей теории гомологий на элементарном языке, доступном неспециалистам. Оно обобщается на высшие размерности (§4).

Пусть сначала одна из ломаных  $b$  трехзвенная. Обозначим другую ломаную через  $a$ . Возьмем точку  $A \notin b$ , для которой ни один из отрезков, соединяющих ее с вершиной ломаной  $a$ , не содержит вершин ломаной  $b$ . Тогда (рис. 1.3.2)

$$|a \cap b| = \sum_{MN} |MN \cap b| \equiv_2 \sum_{MN} |\partial AMN \cap b| \equiv_2 0.$$

Здесь суммирование идет по всем ребрам  $MN$  ломаной  $a$ ; последнее сравнение следует из п. (а).

Общий случай сводится к рассмотренному частному аналогично сведению частного к п. (а).  $\square$

Пусть  $A, B, C, D$  — точки на плоскости, никакие три из которых не лежат на одной прямой. **Знаком** точки пересечения ориентированных отрезков  $\overrightarrow{AB}$  и  $\overrightarrow{CD}$  на плоскости назовем  $+1$ , если обход  $ABC$  происходит по часовой стрелке, и  $-1$  в противном случае.

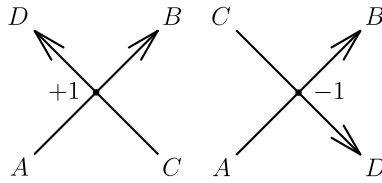


Рис. 1.3.3: Знак точки пересечения

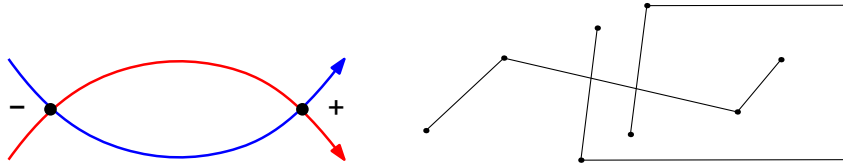


Рис. 1.3.4: Две ломаные на плоскости, пересекающиеся в четном числе точек, сумма знаков которых равна нулю (слева) и не равна нулю (справа)

**Лемма 1.3.4** (о тривиальности). *Если вершины двух замкнутых плоских ломаных находятся в общем положении, то сумма знаков точек пересечения ломаных равна нулю.*

Аналогично лемме о четности 1.3.3.b эта лемма сводится к частному случаю трехзвенных ломаных, который доказывается аналогично лемме о четности 1.3.3.a.

**Задача 1.3.5.** На плоскости имеется 14 точек: 7 красных и 7 желтых. Никакие три из них не лежат на одной прямой.

(a) Количество пар  $(a, b)$  пересекающихся красных (т.е. соединяющих красные точки) отрезков  $a$  и желтых отрезков  $b$  четно.

(b) По красным отрезкам течет ток. Сумма токов, входящих в любую красную точку, равна сумме токов, из нее выходящих. По желтым отрезкам течет ток с выполнением того же правила Кирхгофа. Ориентируем каждый красный или желтый отрезок направлением тока, текущего по нему. Для любых пересекающихся красного и желтого отрезков возьмем произведение токов, текущих по ним, на знак точки пересечения. Тогда сумма всех взятых чисел (поток красного тока через желтый) равна нулю.

*Указания.* (a) Объединение красных отрезков есть сумма по модулю 2 контуров красных треугольников. И  $(A \oplus B) \cap C = (A \cap C) \oplus (B \cap C)$ . П. (a) также доказывается любым из способов, приведенных в замечании 1.3.6.a.

(b) Доказательство аналогично п. (a).

**Замечание 1.3.6.** Верны следующие версии для *циклов* леммы о четности 1.3.3 и предложения 1.3.5.a. Cf. [MNS].

(a) Назовем *1-циклом* конечный набор отрезков (не вырожденных в точку) на плоскости, такой что каждая точка плоскости является концом четного числа отрезков набора. An example of a 1-cycle is the set of all edges of a closed polygonal line. Тогда *любые два 1-цикла, все концы отрезков которых находятся в общем положении, пересекаются в четном числе точек.*

Доказательство аналогично вышеприведенному доказательству леммы о четности 1.3.3.b; используется индукция по минимальному количеству отрезков в 1-цикле. Другое доказательство использует «сингулярный конус» (оно получается из доказательства леммы 1.3.3.c заменой «ломаных» на «1-циклы»). Еще одно доказательство — вывод из леммы о четности 1.3.3.b.

(b) Назовем *2-циклом* конечный набор треугольников (не вырожденных в точку или отрезок) на плоскости, такой что любой отрезок на плоскости является стороной чет-

ного числа треугольников набора. An example of a 2-cycle is the plane projection of faces of a tetrahedron (or of another ‘triangulated surface’). Тогда *если точка плоскости находится в общем положении с вершинами некоторого 2-цикла, то она принадлежит четному числу треугольников 2-цикла.*

Доказательство использует равенство  $|AB \cap \partial\Delta| \equiv \frac{|A \cap \Delta| + |B \cap \Delta|}{2}$  для отрезка  $AB$  и треугольника  $\Delta$ , ср. утверждение 2.2.1.

## 1.4 Инвариант самопересечения изображения графа

Мы рассматриваем изображения графов на плоскости, при которых ребра изображаются ломаными (и допускаются пересечения этих ломаных). Строго говоря, **отображением** (кусочно-линейным, PL)  $f : K \rightarrow \mathbb{R}^2$  графа  $K$  в плоскость называется

- набор точек плоскости, соответствующих вершинам, вместе с
- набором (незамкнутых) ломаных на плоскости, каждая из которых соединяет те пары из набора точек, которые соответствуют парам смежных вершин графа.

**Образ**  $f(\sigma)$  ребра  $\sigma$  (при отображении  $f$ ) — это объединение отрезков соответствующей ломаной. **Образ** набора ребер — это объединение образов всех ребер из набора.

**Теорема 1.4.1** (теорема ван Кампена-Флореса для плоскости, ср. утверждение 1.1.1.a и теорему 2.2.2). *Для любого PL отображения графа  $K_5$  в плоскость найдутся два несмежных ребра, образы которых пересекаются.*

Эта теорема выводится из ее «количественной версии» (леммы 1.4.3): при «почти любом» изображении графа  $K_5$  на плоскости количество точек пересечения несмежных ребер нечетно (подумайте, как формализовать «почти любом» и сравните с нижеприведенной формализацией). В выводе используется аппроксимация, ср. с замечанием 7.2.3.b и [Sk20, лемма 1.4.6b об аппроксимации].

PL отображение графа в плоскость называется PL отображением *общего положения* (PLGP отображением), если все вершины ломаных из определения отображения находятся в общем положении. Для PLGP отображения  $f$  образы любых двух несмежных ребер пересекаются в конечном числе точек (по утверждению 1.3.1). **Числом ван Кампена** (или инвариантом самопересечения)  $v(f) \in \mathbb{Z}_2$  называется четность числа точек пересечения образов несмежных ребер.

**Пример 1.4.2.** *Два отрезка на плоскости, имеющие общую внутреннюю точку, образуют PLGP отображение  $f : K \rightarrow \mathbb{R}^2$  планарного графа  $K$ , для которого  $v(f) = 1$ .*

*Выпуклый четырехугольник и его диагонали образуют PLGP отображение  $f : K_4 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , для которого  $v(f) = 1$ .*

*Выпуклый пятиугольник и его диагонали образуют PLGP отображение  $f : K_5 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , для которого  $v(f) = 1$ .*

*Если граф  $K$  планарен, то  $v(f) = 0$  для некоторого PLGP отображения  $f : K \rightarrow \mathbb{R}^2$ .*

*Если  $K$  — несвязное объединение двух циклов, то лемма о четности 1.3.3.b означает, что  $v(f) = 0$  для любого PLGP отображения  $f : K \rightarrow \mathbb{R}^2$ .*

**Лемма 1.4.3** (ср. утверждение 1.1.1.b). *Для любого PLGP отображения графа  $K_5$  в плоскость число ван Кампена нечетно.*

*Доказательство.* Ввиду утверждения 1.1.1.b лемма верна для отображений, при которых образ каждого ребра является отрезком, концы которого — образы концов ребра. Поэтому достаточно доказать, что  $v(f) = v(f')$  для любых двух PLGP отображений  $f, f' : K_5 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , отличающихся только на внутренности одного ребра  $\sigma$ , причем  $f\sigma$  —



отрезок (рис. 1.4.1). Ребра графа  $K_5$ , несмежные с  $\sigma$ , образуют цикл (именно это свойство графа  $K_5$  необходимо для доказательства). Обозначим этот цикл через  $\Delta$ . Тогда

$$v(f) - v(f') = \sum_{\tau : \sigma \cap \tau = \emptyset} (|f\sigma \cap f\tau|_2 - |f'\sigma \cap f'\tau|_2) = |(f\sigma \cup f'\sigma) \cap f\Delta|_2 = 0.$$

Здесь последнее равенство справедливо по лемме о четности 1.3.3.b. □

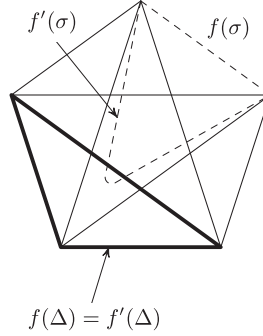


Рис. 1.4.1: Независимость  $v(f)$  от  $f$

**Замечание 1.4.4.** (а) Пусть  $N \subset \mathbb{R}^m$  и  $Y \subset \mathbb{R}^n$ . Отображение  $f: N \rightarrow Y$  называется **непрерывным**, если для любых  $x \in N$  и  $\varepsilon > 0$  существует такое  $\delta > 0$ , что при любых  $y \in N$ , удовлетворяющих условию  $|x - y| < \delta$ , выполнено неравенство  $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ . Как правило, мы пропускаем слово «непрерывный» для отображений и действий групп.

Верен аналог теоремы 1.4.1, полученный заменой ‘PL’ на ‘непрерывного’.

(b) Верны аналоги теоремы 1.4.1 и леммы 1.4.3, полученные заменой графа  $K_5$  на граф  $K_{3,3}$ .

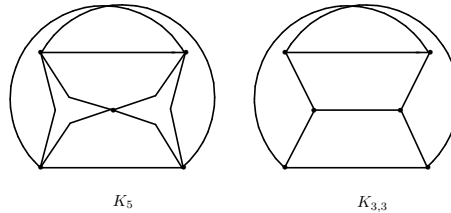


Рис. 1.4.2: «Почти-вложение»  $K_5 \rightarrow K_{3,3}$

(c) Непланарность графа  $K_{3,3}$  вытекает также из теоремы 1.4.1 и рис. 1.4.2 [Sk03].

## 1.5 Полиномиальный алгоритм распознавания планарности

### 1.5.1 Расстановка пересечений

Полиномиальный алгоритм распознавания планарности получается из критерия ван Кампена-Ханани-Татта планарности графов (утверждение 1.5.8). Его формулировка формально независима от предыдущего материала. Однако мы показываем, как придумать этот критерий. Мы рассмотрим естественный объект (расстановку пересечений) для любого «хорошего» (PLGP) отображения графа в плоскость (п. 1.5.1). Далее мы исследуем, как этот объект зависит от отображения (утверждение 1.5.4). Так мы получим из этого объекта препятствие к планарности, уже не зависящее от отображения. Линейно-алгебраическая (=кохомологическая) интерпретация этого препятствия и дает нужный критерий планарности.

Граф называется  $\mathbb{Z}_2$ -планарным, если существует такое его PLGP отображение в плоскость, при котором образы любых двух несмежных ребер пересекаются в четном числе точек.

Например, граф  $K_5$  не является  $\mathbb{Z}_2$ -планарным ввиду леммы 1.4.3. Аналогично, граф  $K_{3,3}$  не является  $\mathbb{Z}_2$ -планарным ввиду замечания 1.4.4.b). Поэтому и никакой граф  $K$ , гомеоморфный  $K_5$  или  $K_{3,3}$ , не является  $\mathbb{Z}_2$ -планарным (ибо любое PLGP отображение  $K \rightarrow \mathbb{R}^2$  соответствует некоторому PLGP отображению  $K_5 \rightarrow \mathbb{R}^2$  или  $K_{3,3} \rightarrow \mathbb{R}^2$ ). Из этого и теоремы Куратовского 1.2.3.e вытекает следующий результат.

**Теорема 1.5.1** (Ханани-Татта; ср. Theorem 6.9.2 and [Sk18, теоремы 2.4.2a и 3.3.4]). *Граф планарен тогда и только тогда, когда он  $\mathbb{Z}_2$ -планарен.*<sup>12</sup>

Итак, осталось построить алгоритм распознавания  $\mathbb{Z}_2$ -планарности.

**Пример 1.5.2.** *Пусть дан граф и произвольное упорядочение его вершин. Расставим его вершины на окружности в заданном порядке, так чтобы никакие три соединяющие их хорды не пересекались в одной точке. Возьмем хорду для каждого ребра. Получим линейное отображение общего положения графа в плоскость. Для любых несмежных ребер  $\sigma, \tau$  графа количество точек пересечения их образов имеет ту же четность, что и количество концов ребра  $\sigma$ , лежащих между концами ребра  $\tau$ .*

Пусть  $f : K \rightarrow \mathbb{R}^2$  — PLGP отображение графа  $K$ . Возьмем любые два несмежных ребра  $\sigma, \tau$ . По утверждению 1.3.1 пересечение  $f\sigma \cap f\tau$  состоит из конечного числа точек. Поставим в соответствие паре  $\{\sigma, \tau\}$  вычет

$$|f\sigma \cap f\tau|_2.$$

Обозначим через  $K^*$  множество неупорядоченных пар несмежных ребер графа  $K$ . Назовем полученное отображение  $K^* \rightarrow \mathbb{Z}_2$  **расстановкой (или коциклом) пересечений** (по модулю 2). Мы называем его расстановкой, чтобы не путать с отображением  $f$ . Отображение  $K^* \rightarrow \mathbb{Z}_2$  будем отождествлять с подмножеством в  $K^*$  (состоящим из пар, переходящих в единицу).<sup>13</sup>

**Замечание 1.5.3.** (a) Если граф  $\mathbb{Z}_2$ -планарен, то расстановка пересечений нулевая для некоторого PLGP отображения этого графа в плоскость.

(b) (ср. с примером 1.5.2) Возьмем линейное отображение  $f : K_n \rightarrow \mathbb{R}^2$ , для которого  $f(1)f(2) \dots f(n)$  — выпуклый  $n$ -угольник. Для  $n = 4$  и  $n = 5$  расстановки пересечений соответствуют подмножествам  $\{\{13, 24\}\}$  и  $\{\{13, 24\}, \{24, 35\}, \{35, 41\}, \{41, 52\}, \{52, 13\}\}$ .

<sup>12</sup>Прямой вывод планарности из  $\mathbb{Z}_2$ -планарности см. в [Sc13]. Прямой вывод  $\mathbb{Z}_2$ -планарности из отсутствия подграфов, гомеоморфных  $K_5$  и  $K_{3,3}$ , см. в [Sa91].

<sup>13</sup>Отображение  $K^* \rightarrow \mathbb{Z}_2$  можно также понимать как «частичную матрицу», т.е. симметричную расстановку нулей и единиц в тех клетках таблицы размера  $e \times e$ , которые отвечают парам несмежных ребер, где  $e$  — количество ребер графа  $K$ . Знакомые с понятием комплекса (п. 6.3) могут представлять себе  $K^*$  комплексом. Тогда расстановка пересечений — расстановка нулей и единиц на всех тех «прямоугольниках» комплекса  $K^*$ , которые являются произведениями несмежных ребер. Ср. с п. 8.2. Для любого PLGP отображения  $f : K \rightarrow \mathbb{R}^2$  графа  $K$  число ван Кампена  $v(f)$  равно сумме значений коцикла пересечений на всевозможных неупорядоченных парах несмежных ребер.

Получаются следующие частичные матрицы (ребра упорядочены лексикографически).

$$\begin{pmatrix} - & - & - & - & - & 0 \\ - & - & - & - & 1 & - \\ - & - & - & 0 & - & - \\ - & - & 0 & - & - & - \\ - & 1 & - & - & - & - \\ 0 & - & - & - & - & - \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{pmatrix} - & - & - & - & - & - & - & 0 & 0 & 0 \\ - & - & - & - & - & 1 & 1 & - & - & 0 \\ - & - & - & - & 0 & - & 1 & - & 1 & - \\ - & - & - & - & 0 & 0 & - & 0 & - & - \\ - & - & 0 & 0 & - & - & - & - & - & 0 \\ - & 1 & - & 0 & - & - & - & - & 1 & - \\ - & 1 & 1 & - & - & - & - & 0 & - & - \\ 0 & - & - & 0 & - & - & 0 & - & - & - \\ 0 & - & 1 & - & - & 1 & - & - & - & - \\ 0 & 0 & - & - & 0 & - & - & - & - & - \end{pmatrix}.$$

(c) A subset  $C \subset K^*$  is called a **2-cycle** (modulo 2) if for each edge  $\sigma$  and vertex  $A \notin \sigma$  there is an even number of edges  $\tau$  having a vertex  $A$  and such that  $\{\sigma, \tau\} \in C$ . For a general position PL map  $f : K \rightarrow \mathbb{R}^2$  define the  $C$ -van Kampen number

$$v_C(f) := \sum_{\{\sigma, \tau\} \in C} |f\sigma \cap f\tau| \in \mathbb{Z}_2.$$

Analogously to Lemma 1.4.3  $v_C(f)$  is independent of  $f$ , and so depends only on  $K$  and  $C$ .

A graph  $K$  is  $\mathbb{Z}_2$ -planar if and only if the its  $C$ -van Kampen number is zero for any 2-cycle  $C \subset K^*$ .

This is deduced from Proposition 1.5.7 (аналогично утверждению 9.2.8.b), and gives a polynomial algorithm recognizing planarity.

### 1.5.2 Расстановки пересечений для разных отображений

Расстановки  $K^* \rightarrow \mathbb{Z}_2$  можно складывать поточечно (покомпонентно): складываются по модулю 2 образы каждой пары. Это соответствует сложению по модулю 2 (т.е. симметрической разности) подмножеств множества  $K^*$ .

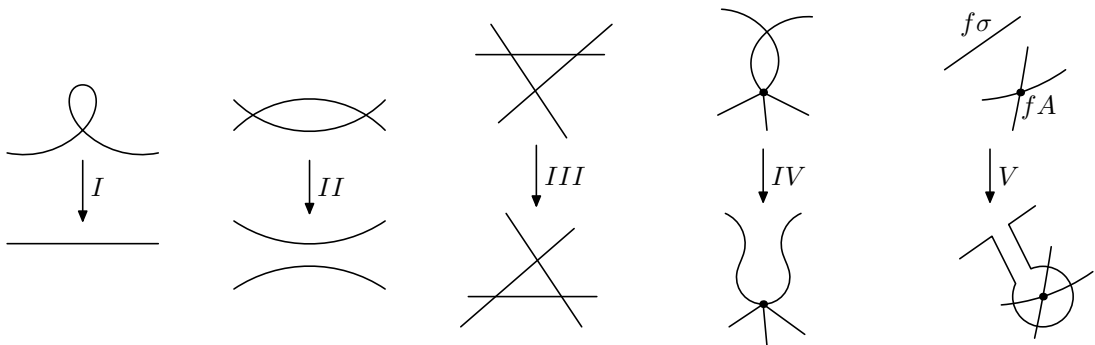


Рис. 1.5.1: Преобразования Райдемайстера для графов в плоскости

**Утверждение 1.5.4.** (a) Расстановка пересечений не меняется при преобразованиях Райдемайстера на рис. 1.5.1.I-IV. (Отображение графа изменяется в круге, как на рисунках, а вне этого круга остается без изменений. В п. (a) никакие образы ребер, кроме изображенных, этот круг не пересекают.)

(b) Пусть  $K$  — граф и вершина  $A$  не является концом ребра  $\sigma$ . **Элементарной кограницей** пары  $(A, \sigma)$  называется подмножество  $\delta_K(A, \sigma) = \delta(A, \sigma) \subset K^*$ , состоящее из всех пар  $\{\sigma, \tau\}$  с  $\tau \ni A$ . Тогда при преобразовании Райдемайстера на рис. 1.5.1.V

к расстановке пересечений добавляется  $\delta(A, \sigma)$ . (В п. (b) образы ребер, кроме изображенных, могут пересекать круг, в котором делается преобразование. Зато «параллельные» отрезочки проходят «очень близко» друг к другу.)

**Пример 1.5.5.** (a) Имеем  $\delta_{K_4}(1, 24) = \delta_{K_4}(2, 13) = \delta_{K_4}(3, 24) = \delta_{K_4}(4, 13) = \{\{13, 24\}\}$ . Итак, расстановка пересечений из замечания 1.5.3.b для  $n = 4$  является элементарной кограницей.

(b) Имеем  $\delta_{K_5}(3, 12) = \{\{12, 34\}, \{12, 35\}\}$ . Поэтому расстановка пересечений из замечания 1.5.3.b для  $n = 5$  не является суммой нескольких элементарных кограниц. Действительно, прибавление элементарной кограницы не меняет четность количества единиц, кои пять.

(c) For every edge  $\sigma$  of a graph  $K$  we have  $\sum_{A \in V(K) - \partial\sigma} \delta(A, \sigma) = 0$ .

Назовем расстановки  $\nu_1, \nu_2 : K^* \rightarrow \mathbb{Z}_2$  (или  $\nu_1, \nu_2 \subset K^*$ ) **когомологичными**, если

$$\nu_1 - \nu_2 = \delta(A_1, \sigma_1) + \dots + \delta(A_k, \sigma_k)$$

для некоторых вершин  $A_1, \dots, A_k$  и ребер  $\sigma_1, \dots, \sigma_k$  (не обязательно различных).

Утверждение 1.5.4.b и следующая лемма 1.5.6 показывают, что когомологичность — это то отношение эквивалентности на расстановках, которое порождают изменения отображения графа в плоскость.

**Лемма 1.5.6.** Расстановки пересечений разных PLGP отображений одного графа в плоскость когомологичны.

Доказательство леммы 1.5.6, приведенное ниже, является нетривиальным обобщением доказательства леммы 1.4.3.

**Утверждение 1.5.7.** Граф  $\mathbb{Z}_2$ -планарен тогда и только тогда, когда расстановка пересечений некоторого (или, эквивалентно, любого) его PLGP отображения в плоскость когомологична нулевой расстановке.

Это следует из леммы 1.5.6 и утверждения 1.5.4.b.

**Утверждение 1.5.8.** Пусть дан граф и произвольная нумерация его вершин. Этот граф планарен тогда и только тогда, когда следующая система линейных уравнений над  $\mathbb{Z}_2$  разрешима.

Каждой паре  $A, e$ , состоящей из вершины и ребра таких, что  $A \notin e$ , сопоставим переменную  $x_{A,e}$ . Для каждой неупорядоченной пары несмежных ребер  $\sigma, \tau$  обозначим через  $b_{\sigma,\tau} \in \mathbb{Z}_2$  четность количества концов ребра  $\sigma$ , номера которых лежат между номерами концов ребра  $\tau$ . Для любых таких пар  $(A, e)$  и  $\{\sigma, \tau\}$  положим

$$a_{A,e,\sigma,\tau} = \begin{cases} 1, & \text{если } (A \in \sigma \text{ и } e = \tau) \text{ или } (A \in \tau \text{ и } e = \sigma) \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}.$$

Для каждой такой пары  $\{\sigma, \tau\}$  выпишем уравнение  $\sum_{A \notin e} a_{A,e,\sigma,\tau} x_{A,e} = b_{\sigma,\tau}$ .

Это следует из теоремы 1.5.1 Ханани-Татта, примера 1.5.2 и утверждения 1.5.7. For a combinatorial interpretation see Remark 1.7.3.a.

### 1.5.3 Доказательство леммы 1.5.6

Пусть даны граф  $K$  и PLGP отображения  $f, f' : K \rightarrow \mathbb{R}^2$ .<sup>14</sup>

*Доказательство для частного случая, когда отображения  $f$  и  $f'$  отличаются только на внутренности одного ребра  $\sigma$ , причем  $f\sigma$  — отрезок.* Возьмем точку  $O$  на плоскости, находящуюся в общем положении относительно множества всех вершин всех ломаных  $f\alpha$  и  $f'\alpha$  (для всех ребер  $\alpha$ ). Для ломаной  $X$  в общем положении с циклом  $f\sigma \cup f'\sigma$  обозначим

$$X^* := |(f\sigma \cup f'\sigma) \cap X|_2.$$

Достаточно доказать, что разность расстановок пересечений  $\nu(f)$  для  $f$  и  $\nu(f')$  для  $f'$  равна

$$\nu(f) - \nu(f') = \sum_{B \notin \sigma} Of(B)^* \delta(B, \sigma) = \delta(B_1, \sigma) + \dots + \delta(B_k, \sigma),$$

где  $B_1, \dots, B_k$  — все те вершины  $B \notin \sigma$ , для которых отрезок  $Of(B)$  пересекает цикл  $f\sigma \cup f'\sigma$  в нечетном числе точек. (Сравните с утверждениями 2.2.1.ab. Набор вершин  $B_1, \dots, B_k$  зависит от выбора точки  $O$ , но формула справедлива при любом выборе.)

Для любых ребер  $\alpha$  и  $\beta$ , каждое из которых отлично от  $\sigma$ , значения расстановок пересечений  $\nu(f)$  и  $\nu(f')$  на паре  $\{\alpha, \beta\}$  равны.

Для любого ребра  $PQ$ , несмежного с  $\sigma$ , значение на паре  $\{\sigma, PQ\}$  разности  $\nu(f) - \nu(f')$  равно

$$(\nu(f) - \nu(f'))_{\{\sigma, PQ\}} = f(PQ)^* \stackrel{(2)}{=} Of(P)^* + Of(Q)^* = \left( \sum_{B \notin \sigma} Of(B)^* \delta(B, \sigma) \right)_{\{\sigma, PQ\}}.$$

Здесь равенство (2) справедливо, ибо по лемме о четности 1.3.3.b

$$0 = (Of(P) \cup Of(Q) \cup f(PQ))^* = Of(P)^* + Of(Q)^* + f(PQ)^*.$$

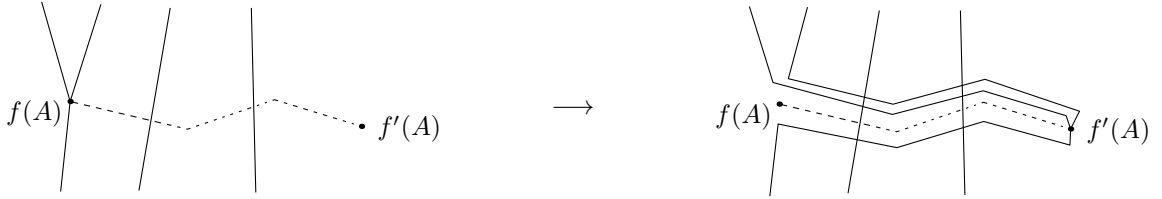


Рис. 1.5.2: Модификация PLGP отображения

*Сведение общего случая к частному.* Достаточно доказать лемму для отображения  $f$ , отличающегося от  $f'$  только на множестве ребер, выходящих из одной вершины  $A$ . Соединим  $f(A)$  с  $f'(A)$  ломаной общего положения.<sup>15</sup> Для ребер  $\sigma$ , не выходящих из  $A$  «подтащим образы  $f\sigma = f'\sigma$  к  $f'(A)$  вдоль ломаной» так, что

- эта ломаная не пересекает модифицированных образов ребра  $\sigma$ , и

<sup>14</sup>Лемма 1.5.6 вытекает из следующего факта: любые два PLGP отображения одного графа в плоскость можно перевести друг в друга преобразованиями Райдемайстера на рис. 1.5.1. Впрочем, доказать лемму проще, чем этот факт.

<sup>15</sup>Вот немного другое завершение сведения (предложено Р. Карасевым). Возьмем отображение  $f''$ , полученное из  $f$  «подтаскиванием окрестности вершины  $f(A)$  к  $f'(A)$  вдоль ломаной» (ср. с рис. 1.5.2 и рис. 1.5.1.V). Аналогично утверждению 1.5.4.b (или другому доказательству утверждения 1.1.1.b) расстановки пересечений  $\nu(f)$  и  $\nu(f'')$  когомологичны. По рассмотренному частному случаю расстановки пересечений  $\nu(f'')$  и  $\nu(f')$  когомологичны. Значит,  $\nu(f)$  и  $\nu(f')$  когомологичны.

- точки пересечения образов таких ребер  $\sigma$  остаются прежними.
- Обозначим через
- $\bar{f}$  и  $\bar{f}'$  отображения, полученные из  $f$  и  $f'$  таким «подтаскиванием»;
  - $f''$  отображение, полученное из  $\bar{f}$  «подтаскиванием окрестности вершины  $f(A) = \bar{f}(A)$  к  $f'(A) = \bar{f}'(A)$  вдоль ломаной».
- См. рис. 1.5.2. Тогда

$$\nu(f) = \nu(\bar{f}) = \nu(f'') \stackrel{(1)}{\simeq} \nu(\bar{f}') = \nu(f').$$

Здесь когомологичность (1) справедлива по рассмотренному частному случаю.

### 1.5.4 Пересечения со знаком

Here we generalize previous constructions from residues modulo 2 to integers. Это обобщение формально не используются далее. Однако это простое обобщение (и, возможно, замечание 2.4.1) полезно проделать перед более сложными обобщениями в п. 6.8, 6.9 и [Sk18, п. 2.3.3 и 2.4].

Suppose that  $l$  and  $p$  are (oriented) polygonal lines in the plane whose vertices are in general position. Определим *алгебраическое число пересечения*  $l \cdot p$  ломаных  $l$  и  $p$  как сумму знаков их точек пересечения. См. рис. 1.3.4.

**Задача 1.5.9.** (а) Имеем  $l \cdot p = -p \cdot l$ .

(б) При изменении ориентации ломаной  $l$  число  $l \cdot p$  изменит знак.

(с) При изменении ориентации плоскости, т.е. при осевой симметрии, число  $l \cdot p$  изменит знак.

Пусть  $f : K \rightarrow \mathbb{R}^2$  — PLGP отображение графа  $K$ . Ориентируем ребра графа  $K$ . Поставим в соответствие упорядоченной паре  $(\sigma, \tau)$  несмежных ребер алгебраическое число  $f\sigma \cdot f\tau$  пересечения. Обозначим через  $\tilde{K}$  множество упорядоченных пар несмежных ребер графа  $K$ . Полученная расстановка (=отображение)  $\cdot : \tilde{K} \rightarrow \mathbb{Z}$  называется **целочисленной расстановкой пересечений** (for given orientations).

**Утверждение 1.5.10.** *Analogues of Propositions 1.5.4.ab are true for the integral intersection cocycles, with the following definition. Let  $K$  be an oriented graph and  $A$  — вершина, не являющаяся концом ребра  $\sigma$ . Кососимметричной элементарной кограницей пары  $(A, \sigma)$  называется расстановка  $\delta(A, \sigma) : \tilde{K} \rightarrow \mathbb{Z}$ , при которой*

- в единицу отображается каждая пара  $(\sigma, \tau)$ , для которой  $\tau$  выходит из  $A$ , и каждая пара  $(\tau, \sigma)$ , для которой  $\tau$  входит в  $A$ ,
- в минус единицу отображается каждая пара  $(\sigma, \tau)$ , для которой  $\tau$  входит в  $A$ , и каждая пара  $(\tau, \sigma)$ , для которой  $\tau$  выходит из  $A$ ,
- в ноль отображаются все остальные пары.

Назовем расстановки  $N_1, N_2 : \tilde{K} \rightarrow \mathbb{Z}$  **кососимметрично когомологичными**, если

$$N_1 - N_2 = m_1\delta(A_1, \sigma_1) + \dots + m_k\delta(A_k, \sigma_k)$$

для некоторых вершин  $A_1, \dots, A_k$ , ребер  $\sigma_1, \dots, \sigma_k$  и целых чисел  $m_1, \dots, m_k$  (не обязательно различных).

Следующий целочисленный аналог леммы 1.5.6 is proved analogously using the Triviality Lemma 1.3.4.

**Лемма 1.5.11.** *The integer intersection cocycles of different PLGP maps of the same graph to the plane are skew-symmetrically cohomologous.*

**Утверждение 1.5.12.** *Удвоенная целочисленная расстановка пересечений любого PLGP отображения графа в плоскость кососимметрично когомологична нулевой расстановке.*

This follows by Assertion 1.5.9.c and Lemma 1.5.11. Cf. [Sk18, Proposition 2.4.7].

**Замечание 1.5.13.** Граф называется  $\mathbb{Z}$ -планарным, если существует его PLGP отображение в плоскость, при котором сумма знаков точек пересечения образов любых двух несмежных ребер равна нулю, для некоторых (или, эквивалентно, для любых) ориентаций на этих ребрах. One can prove analogously to Theorem 1.5.1, or deduce from it, that *граф планарен тогда и только тогда, когда он  $\mathbb{Z}$ -планарен*. Integral analogue of Proposition 1.5.7 is correct and follows by Lemma 1.5.11 and Proposition 1.5.10.

## 1.6 Алгоритм распознавания изотопности вложений

*Вложением* (кусочно-линейным, PL) графа в плоскость называется набор вершин и ломаных из определения планарности, для которого никакая изолированная вершина не лежит ни на одной из ломаных. Это то же, что его PL отображение в плоскость, для которого образы вершин попарно различны, сужения на ребра (=ломаные) несамопересекающиеся, и никакой образ ребра не пересекает внутренности никакого другого образа ребра. Определение *почти вложения* приведено в Remark 6.10.3.a и в [ABM+, §4]. (Результаты и построения этого пункта справедливы и для топологических вложений, определение которых известно некоторым читателям.)

Два (почти) вложения  $f, g : K \rightarrow \mathbb{R}^2$  графа  $K$  в плоскость называются (*почти*) *изотопными*, если одно можно непрерывно продеформировать в другое так, чтобы в процессе деформации отображение оставалось (почти) вложением. Вот строгая формулировка этого условия: существует семейство (почти) вложений  $f_t : K \rightarrow \mathbb{R}^2$ , непрерывно зависящее от параметра  $t \in [0, 1]$ , для которого  $f_0 = f$  и  $f_1 = g$ .

Например, пары вложений на каждом из рис. 1.6.1.abc не изотопны (и даже не почти изотопны).

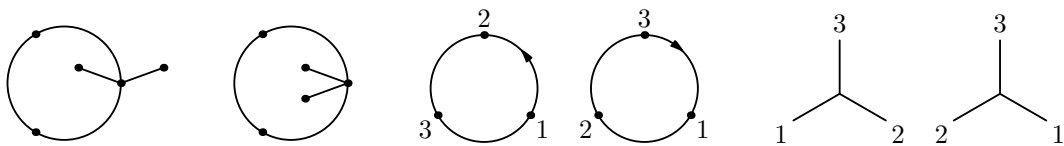


Рис. 1.6.1: Различные вложения (а) некоторого графа, (б) окружности, и (с) триода

**Теорема 1.6.1.** *Два вложения связного графа в плоскость изотопны тогда и только тогда, когда их сужения на любой триод и на любой несамопересекающийся цикл изотопны (т.е. не таковы, как на рис. 1.6.1.bc).*

Эту теорему можно сначала доказать для деревьев, а потом свести общий случай к случаю деревьев путем выделения максимального дерева. Детали технически непросты (как это часто бывает для базовых результатов топологии плоскости).<sup>16</sup> Аналог теоремы 1.6.1 без утверждения в скобках справедлив для вложений в сферу, тор и другие сферы с ручками. Доказательство аналогично.

<sup>16</sup>Теорема 1.6.1 сформулирована в книге [Wu65] со ссылкой на статью Маклейна-Эддисона, которую не удалось найти в указанном там сборнике. Специалисты по топологической теории графов подтверждают, что эта теорема известна (и верна). В книге [Wu65] теорема 1.6.1 сформулирована для вложений даже *локально связного континуума* (в частности, *полиэдра*).

О классификации *погружений* (т.е. «локальных вложений») графа в плоскость с точностью до регулярной гомотопии (т.е. «локальной изотопии») см. [Pe08, Pe16].

Мы приведем более сложный критерий изотопности (участвующие в нем термины определены после него). Он интересен тем, что дает полиномиальный алгоритм распознавания изотопности вложений, гипотетически обобщается на критерий почти изотопности почти вложений, а также обобщается на высшие размерности [Sk06, §4].

**Утверждение 1.6.2.** *Следующие условия на вложения графа  $K$  в плоскость равносильны:*

- (i) *они изотопны;*
- (i') *они почти изотопны;*
- (ii) *их  $C$ -числа Ву равны для любого целочисленного 1-цикла  $C$  в графе  $K^{\square 2}$ ;*
- (iiS) *их  $C$ -числа Ву равны для любого симметричного целочисленного 1-цикла  $C$  в графе  $K^{\square 2}$ ;*
- (iii) *их полуцелочисленные расстановки вращений когомологичны;*
- (iiiS) *их полуцелочисленные расстановки вращений симметрично когомологичны.*

Далее в этом пункте  $K$  — любой граф и  $f : K \rightarrow \mathbb{R}^2$  — любое (почти) вложение.

Определим граф  $K^{\square 2}$  — *врезанный бокс-квадрат* графа  $K$ . Вершинами графа  $K^{\square 2}$  являются упорядоченные пары различных вершин графа  $K$ . Вершины  $(a, b)$  и  $(a', b')$  графа  $K^{\square 2}$  соединены ребром в  $K^{\square 2}$ , если либо  $a = a'$  и  $bb'$  — ребро в  $K$ , либо  $b = b'$  и  $aa'$  — ребро в  $K$ . Ребро, соединяющее  $(a, b)$  с  $(a, b')$  ( $(a, b)$  с  $(a', b)$ ) обозначается  $(a, bb')$  ( $(aa', b)$ ). См. подробнее [MNS, §1.9, рис. 13 и примеры после него].

*Количество оборотов  $w'(p, O) \in \mathbb{R}$  ломаной  $p$  вокруг точки  $O$  определено в [ABM+, §1].*

Зададим направления на ребрах графа  $K$ . Возьмем его ребро  $bc$ , ориентированное от  $b$  к  $c$ . Для ребра  $(bc, a)$  графа  $K^{\square 2}$  определим число  $w_f(bc, a) := w'(f|_{bc}, f(a)) \in \mathbb{R}$  как количество оборотов вектора с началом в  $f(a)$  и концом, пробегающим ломаную  $f|_{bc}$ . Определим  $w_f(a, bc)$  аналогично, только поменяв местами начало и конец вектора. Получится  $w_f(a, bc) = w_f(bc, a)$ . Построенную расстановку  $w_f$  чисел на ориентированных ребрах графа  $K^{\square 2}$  назовем *расстановкой вращений* (или *коциклом вращений*, см. утверждение 1.6.3.d).

Для каждой вершины  $a$  графа  $K$  возьмем на ребрах  $(a, e)$  и  $(e, a)$  графа  $K^{\square 2}$  направления, соответствующие направлению на ребре  $e$  графа  $K$ . Целочисленные 1-циклы в графе с ориентированными ребрами определены в [Sk20, §10.5]. Примеры целочисленных 1-циклов в графе  $K^{\square 2}$  приводятся аналогично [MNS, §1.9]:  $C \times a$ ,  $\partial(ab \times cd)$ . Обозначим через  $E$  множество ребер графа  $K^{\square 2}$ . Для любого целочисленного 1-цикла  $C : E \rightarrow \mathbb{Z}$  в графе  $K^{\square 2}$  определим  $C$ -число Ву формулой  $w_f(C) := \sum_{e \in E} w_f(e)C(e)$  (ср. определение перед утверждением 9.2.4).

**Задача 1.6.3.** Пусть  $f : K \rightarrow \mathbb{R}^2$  — (почти) вложение.

(a) Возьмите направления на ребрах графов  $K = K_3$  и  $K = K_{3,1}$ . Для каждого из рисунков 1.6.1.бс и пары вложений  $f, f'$  на нем найдите целочисленный 1-цикл  $C$ , такой что  $w_f(C) \neq w_{f'}(C)$ .

(c) For any vertex  $a$  in  $K$  and oriented cycle  $C$  in  $K$  —  $a$  число  $w_f(C \times a)$  равно числу оборотов замкнутой ломаной  $f|_C$  вокруг точки  $f(a)$  (см. определение в §2.3).

(d) (ср. замечание 2.4.1.с и [ABM+, лемма 2.5]) Для любых несмежных ребер  $ab$  и  $cd$  в  $K$  имеем  $w_f(\partial(ab \times cd)) = 0$ .

(e) For any integer 1-cycle  $C$  in  $K^{\square 2}$  the number  $w_f(C)$  is an integer.

(f) Если в графе  $K^{\square 2}$  вершины  $(a, b)$  и  $(b, a)$  соединены путем  $l$ , то число  $2 \sum_{e \in l} w_f(e)$  целое и нечетное.



(b) Если (почти) вложения  $f, f' : K \rightarrow \mathbb{R}^2$  (почти) изотопны, то  $w_f(C) = w_{f'}(C)$  для любого  $C$ .

(g) (riddle; open problem; see [ABM+, Ga23]) Given  $K$  and integer 1-cycles  $C_1, \dots, C_s$  in  $K^{\square 2}$  describe the subset  $\{(w_g(C_1), \dots, w_g(C_s)) : g : K \rightarrow \mathbb{R}^2 \text{ is an almost embedding}\} \subset \mathbb{Z}^s$ .

В утверждении 1.6.2 импликация (i) $\Rightarrow$ (ii) вытекает из (b), а импликация (ii) $\Rightarrow$ (i) вытекает из (a) и теоремы 1.6.1.

*Определение полуцелочисленной расстановки вращений.* Если  $f$ -образы вершин графа не лежат на одной прямой, то не все числа  $w_f(a, bc)$  будут полуцелыми. Приведем построение другой расстановки  $u_{f,l}$ , для которого все числа  $u_{f,l}(a, bc)$  будут полуцелыми, а  $C$ -числа  $W_u$  — прежними. Возьмем любую (неориентированную) прямую  $l$  на плоскости, не параллельную ни одной прямой, соединяющей вершины ломаных, являющихся образами ребер графа.

Рассмотрим вектор с началом в  $f(a)$  и концом, пробегающим ломаную  $f|_{bc}$  в заданном (на ребре  $bc$ ) направлении. Определим полуцелое число  $u_{f,l}(a, bc)$  как полуразность количеств *прохождений* этим вектором направления прямой  $l$  в положительном и в отрицательном направлении (ср. с п. 1.5.4).

Иными словами, определим отображение  $\tilde{f} : bc \rightarrow S^1$  ребра  $bc$  в окружность формулой  $\tilde{f}(x) := \frac{f(x) - f(a)}{|f(x) - f(a)|}$ . Тогда  $u_{f,l}(a, bc)$  есть полусумма *знаков* [Sk20, §8]  $\tilde{f}$ -прообразов двух точек окружности, отвечающих прямой  $l$ .

Определим  $u_{f,l}(a, cb)$  аналогично, только конец вектора пробегает ломаную  $f|_{bc}$  в направлении, противоположном заданному. Определим  $u_{f,l}(bc, a)$  и  $u_{f,l}(cb, a)$  аналогично, только поменяв местами начало и конец вектора. Получится  $u_{f,l}(e, a) = u_{f,l}(a, e)$ , ибо прямая  $l$  неориентированная.

Построенную расстановку  $u_{f,l}$  чисел на ориентированных ребрах графа  $K^{\square 2}$  назовем *полуцелочисленной расстановкой* (или *коциклом вращений*).

Все  $C$ -числа  $W_u$  расстановок  $u_{f,l}$  и  $w_f$  равны ввиду [ABM+, утверждение 2.4.a].

**Задача 1.6.4.** (a-d) Возьмите направления на ребрах графов  $K = K_3$  и  $K = K_{3,1}$ , а также прямую  $l$  на плоскости. Найдите полуцелочисленную расстановку вращений для каждого из четырех вложений  $f$  на рис. 1.6.1.бс. То же для прямой  $l' \perp l$ .

*Кограницей  $\delta v$*  вершины  $v$  графа  $K^{\square 2}$  называется расстановка

- чисел  $+1/2$  на ребрах графа  $K^{\square 2}$ , входящих в  $v$ ,
- чисел  $-1/2$  на ребрах, выходящих из  $v$ , и
- нулей на остальных ребрах.

**Задача 1.6.5.** Значение кограницы на любом 1-цикле равно нулю.

Расстановки полуцелых чисел на ориентированных ребрах графа  $K^{\square 2}$  называются **когомологичными**, если их разность является целочисленной линейной комбинацией кограниц вершин этого графа.

Consider the symmetry (involution)  $t$  of  $K^{\square 2}$  switching the factors (i.e.  $t(x, y) = (y, x)$ ), and the map induced by this symmetry on assignments.

*Симметризованной кограницей* вершины  $v$  графа  $K^{\square 2}$  называется расстановка  $\delta v + \delta tv$ . Расстановки полуцелых чисел на ориентированных ребрах графа  $K^{\square 2}$  называются **симметрично когомологичными**, если их разность является целочисленной линейной комбинацией симметризованных кограниц вершин этого графа.

В утверждении 1.6.2

- импликации (iii) $\Rightarrow$ (ii) и (iiiS) $\Rightarrow$ (iiS) вытекают из утверждения 1.6.5;
- импликации (ii) $\Rightarrow$ (iii) и (iiS) $\Rightarrow$ (iiiS) доказываются аналогично утверждению 9.2.4.b.

**Задача 1.6.6.** (а) Полуцелочисленные расстановки вращений, построенные Вами для двух вложений на рис. 1.6.1.b, не являются симметрично когомологичными. То же для рис. 1.6.1.c.

(с') Для любой вершины  $v$  графа  $K^{\square 2}$  существуют прямые  $l, l'$ , для которых  $u_{f,l} - u_{f,l'} = \delta v + \delta t v$ .

(с) Для любых прямых  $l, l'$  расстановки  $u_{f,l}, u_{f,l'}$  симметрично когомологичны.

(d') Для любой вершины  $v$  графа  $K^{\square 2}$  существует (почти) вложение  $f' : K \rightarrow \mathbb{R}^2$ , (почти) изотопное (почти) вложению  $f$ , и прямая  $l$ , для которых  $u_{f,l} - u_{f',l} = \delta v + \delta t v$ .

(d) Для любой прямой  $l$  полуцелочисленные расстановки вращений любых (почти) изотопных (почти) вложений  $f, f' : K \rightarrow \mathbb{R}^2$  симметрично когомологичны.

Осмысленность условия 1.6.2.iii (т.е. независимость класса симметричной когомологичности полуцелочисленной расстановки вращений от выбора прямой  $l$ ) вытекает из утверждения 1.6.6.c. Импликация (iii) $\Rightarrow$ (i) вытекает из теоремы 1.6.1 и утверждения 1.6.6.a. Импликация (i) $\Rightarrow$ (iii) вытекает из утверждения 1.6.6.d.

**Задача 1.6.7.** There are non-almost-isotopic almost embeddings  $K \rightarrow \mathbb{R}^2$  (even of a connected graph  $K$ ) for which either of the equivalent conditions (ii), (iiS), (iii), (iiiS) holds.

Назовем *коциклом* расстановку полуцелых чисел на ребрах графа  $K^{\square 2}$ , удовлетворяющую условию из утверждения 1.6.3.d. Обозначим через  $H_s^1(\tilde{K}; \frac{1}{2}\mathbb{Z})$  группу симметричных коциклов с точностью до симметричной когомологичности. *Инвариантом*  $Wu(f) := [u_{f,l}] \in H_s^1(\tilde{K}; \frac{1}{2}\mathbb{Z})$  называется класс симметричной когомологичности полуцелочисленной расстановки вращений. Корректность определения вытекает из утверждений 1.6.6.cd. Ввиду утверждений 1.6.3.ef разность  $Wu(f) - Wu(g)$  принимает значения в подгруппе  $H_s^1(\tilde{K}; \mathbb{Z}) \subset H_s^1(\tilde{K}; \frac{1}{2}\mathbb{Z})$ , полученной аналогично из расстановок *целых* чисел. Ср. п. 9.3.

## 1.7 Приложение: некоторые детали к §1

**1.1.1.a.** Приведем другое доказательство. Оно более сложно, но полезно для п. (с), другого доказательства теоремы 1.4.1 и многомерных обобщений [Sk14].

Предположим, напротив, что существуют такие 5 точек  $O, A, B, C, D$  на плоскости, что нужную пару выбрать нельзя. Тогда  $A \notin OB$  и  $B \notin OA$ . Значит,  $A$  не лежит на луче  $OB$ . Поэтому можно считать, что точки  $A, B, C, D$  идут в том порядке, в котором они видны из  $O$ . Тогда контуры треугольников  $OAC$  и  $OBD$  пересекаются в единственной точке  $O$ . Значит, по следующей версии леммы о четности 1.3.3  $AC \cap BD \neq \emptyset$  — противоречие.

*Пусть контуры двух треугольников на плоскости пересекаются только в их общей вершине. Пусть прямая, достаточно близкая к ней, пересекает контур первого треугольника в точках  $X, Y$ , а контур второго — в точках  $Z, T$ , причем точки  $X, Y, Z, T$  попарно различны. Тогда отрезок  $XY$  содержит либо обе, либо ни одной из точек  $Z, T$  (т.е. точки  $X, Y$  зацеплены с точками  $Z, T$ ).*

*Доказательство.* Обозначим точку пересечения  $O$ , а треугольники —  $OX'Y'$  и  $OZ'T'$ , так, что  $X, Y, Z, T$  — точки пересечения прямой и  $OX', OY', OZ', OT'$  соответственно. Обозначим  $a := \partial(OX'Y')$  и  $b := \partial(OZ'T')$ . Утверждение следует из

$$|XY \cap \{Z, T\}| = |XY \cap b| = |\partial(OXY) \cap b| - 1 \equiv |a \cap b| + |\partial(XYY'X') \cap b| - 1 \equiv 0.$$

Здесь последнее сравнение выполнено ввиду условия  $|a \cap b| = 1$  и леммы о четности 1.3.3.b (для контура  $b$  треугольника).

**1.4.1.** Другое доказательство (идея которого не используется далее) аналогично доказательству утверждения 1.1.1.а, приведенному выше. В нем нужно заменить «контуры треугольников» на «ломанные».

Точка  $x$  пересечения двух ломаных на плоскости называется *трансверсальной*, если ломанные несамопересекающиеся в окрестности этой точки и любая достаточно малая окружность  $S_x$  с центром в  $x$  пересекает ломанные по парам точек, *чередующимся* вдоль окружности (т.е. если обозначить через  $A_1, B_1$  точки пересечения первой ломаной с  $S_x$  и через  $A_2, B_2$  точки пересечения второй ломаной с  $S_x$ , то эти точки пересечения расположены на окружности в порядке  $A_1A_2B_1B_2$ ). Иными словами, если два звена одной ломаной, выходящие из точки пересечения, находятся «по разные стороны» от другой ломаной в малой окрестности точки пересечения.

Пересечение ломаных  $OAC$  и  $OBD$  трансверсально. Значит, по следующей версии леммы о четности 1.3.3 ломанные  $AC$  и  $BD$  пересекаются.

*Две замкнутые несамопересекающиеся ломанные на плоскости, пересекающиеся в конечном числе точек трансверсально, пересекаются в четном числе точек.*

**1.3.5.** Вот другие доказательства, использующие сингулярные конусы.

(а) Обозначим желтые точки через  $A_1, A_2, \dots, A_7$ , а красные — через  $B_1, B_2, \dots, B_7$ . Возьмем две точки  $C$  и  $D$ , так чтобы все 16 точек были в общем положении. Тогда

$$0 \equiv \sum_{i < j, k < l} |\partial CA_i A_j \cap \partial DB_k B_l| \equiv \sum_{i < j, k < l} |A_i A_j \cap B_k B_l|.$$

Здесь первое равенство следует из факта, приведенного в указании, а второе из того, что каждый отрезок  $CA_i$  или  $DB_j$  присутствует в шести контурах треугольников, следовательно лежащие на нем точки пересечения «посчитаны» в первой сумме четное число раз.

*Замечание.* Это решение можно изложить, пустив по отрезкам «токи по модулю 2» и доказав их биаддитивность, как в решении п. (b).

(b) Назовем *красным током* (соотв., желтым) расстановку токов (=чисел) на красных (соотв., желтых) отрезках, удовлетворяющую правилу Кирхгофа. Для доказательства заметим, что если взять два красных тока и один желтый, то поток суммы красных токов через желтый будет равен сумме потоков. Аналогично, для одного красного и двух желтых токов сумма потоков равна потоку суммы. Говорят: поток *биаддитивен*.

Добавим к желтым точкам точку  $C$ , а к красным — точку  $D$ , так чтобы все 16 точек находились в общем положении, и на отрезках  $CA_i$  и  $DB_j$  положим токи равными нулю. Для каждого отрезка  $A_i A_j$  рассмотрим ток, текущий по контуру треугольника  $CA_i A_j$ , равный исходному желтому току на  $A_i A_j$  (и нулевой вне этого контура). Тогда сумма этих  $\binom{7}{2}$  токов равна исходному желтому току. Аналогично, разобьем красный ток в сумму  $\binom{7}{2}$  токов, текущих по контурам треугольников  $DB_k B_l$ . Пользуясь биаддитивностью и применяя аналог для 3+3 точек, получаем требуемое.

Утверждения 1.7.1 и 1.7.2 иллюстрируют некоторые идеи теоремы 6.6.3 об NP-трудности. Ср. с предложениями 4.1.5 и 5.2.4.

**Утверждение 1.7.1.** Пусть среди пяти точек 1, 2, 3, 4, 5 на плоскости никакие три не лежат на прямой.

(а) Если отрезки  $jk$ ,  $1 \leq j < k \leq 5$ ,  $(j, k) \neq (1, 2)$ , имеют непересекающиеся внутренности, то точки 1 и 2 находятся по разные стороны от треугольника 345, ср. с рис. 1.0.1 справа;

(b) Если отрезки  $jk$ ,  $1 \leq j < k \leq 5$ ,  $(j, k) \notin \{(1, 2), (1, 3)\}$ , имеют непересекающиеся внутренности, то

ЛИБО точки 1 и 2 находятся по разные стороны от треугольника 345,  
 ЛИБО точки 1 и 3 находятся по разные стороны от треугольника 245.

(с) Если отрезки  $jk$ ,  $1 \leq j < k \leq 5$ ,  $(j, k) \notin \{(1, 2), (1, 3), (1, 4)\}$ , имеют непересекающиеся внутренности, то

ЛИБО точки 1 и 2 находятся по разные стороны от треугольника 345,  
 ЛИБО точки 1 и 3 находятся по разные стороны от треугольника 245,  
 ЛИБО точки 1 и 4 находятся по разные стороны от треугольника 235.

(d) Ой... Вы уже догадались, как формулируется это утверждение и вообще как при изучении вложимости возникают булевы функции.

*Доказательство.* (а) Пять точек можно привести в общее положение, не изменяя ни одного из рассматриваемых свойств. По условию количество точек пересечения отрезка 12 с контуром треугольника 345 равно количеству точек пересечения внутренностей отрезков, соединяющих данные пять точек. Оно нечетно по утверждению 1.1.1.b.

(b,c,d) Эти утверждения аналогичным образом следуют из утверждения 1.1.1.b.  $\square$

**Утверждение 1.7.2.** Удалим из  $K_5$  ребро 12. При любом PL вложении в плоскость полученного графа любая ломаная, соединяющая образы вершин 1 и 2, пересекает образ цикла 345 (т.е. образы вершин находятся по разные стороны от образа цикла).

Это доказывается аналогично утверждению 1.7.1. Вместо утверждения 1.1.1.b нужно использовать лемму 1.4.3. Аналогично формулируются и доказываются PL аналоги утверждений 1.7.1.bcd.

**Замечание 1.7.3.** (а) The solvability of the system of Proposition 1.5.8 is equivalent to the following. Существуют вершины  $V_1, \dots, V_s$  и ребра  $\gamma_1, \dots, \gamma_s$ , для которых  $V_i \notin \gamma_i$  при любом  $i = 1, \dots, s$  и для любых несмежных ребер  $\sigma, \tau$  графа следующие числа имеют одинаковую четность:

- количество концов ребра  $\sigma$ , номера которых лежат между номерами концов ребра  $\tau$ ,
- количество тех  $i = 1, \dots, s$ , для которых либо  $V_i \in \sigma$  и  $\gamma_i = \tau$ , либо  $V_i \in \tau$  и  $\gamma_i = \sigma$ .

(b) The above property is not fulfilled for  $K_5$  and for  $K_{3,3}$ . Let us present a direct reformulation of this for  $K_5$  (for  $K_{3,3}$  the reformulation and the proof are analogous).

Имеется 5 музыкантов разных возрастов. Некоторые пары музыкантов исполнили пьесу, каждая пара некоторым из оставшихся трех музыкантов (возможно, никому из них). Тогда для некоторых двух непересекающихся пар музыкантов сумма следующих трех чисел нечетна:

- количество музыкантов первой пары, возраст которых лежит между возрастaми музыкантов второй пары,
- количество музыкантов первой пары, слушавших вторую пару,
- количество музыкантов второй пары, слушавших первую пару.

А вот переформулировка на математическом языке. Пусть  $A_1, \dots, A_5$  — пять семейств (неупорядоченных) пар (различных элементов) из  $\{1, 2, 3, 4, 5\}$  таких, что никакое  $j \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$  не входит ни в одну пару из  $A_j$ . Тогда для некоторых четырех различных чисел  $i, j, k, l \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$  сумма следующих трех чисел нечетна:

- количество элементов в  $\{i, j\}$ , лежащих между  $k$  и  $l$ ;
- the number of elements  $s \in \{i, j\}$  such that  $A_s \ni \{k, l\}$ ;
- the number of elements  $s \in \{k, l\}$  such that  $A_s \ni \{i, j\}$ .

(Указание. Просуммируем рассматриваемые количества по всем 15 неупорядоченным парам непересекающихся пар музыкантов. Докажите, что сумма нечетна для любого выбора исполнений. См. геометрическую интерпретацию в примере 1.5.5.b.)

**Замечание 1.7.4.** (а) Обозначим через  $H^2(K^*; \mathbb{Z}_2)$  множество расстановок  $K^* \rightarrow \mathbb{Z}_2$  с точностью до когомологичности. (Оно называется *двумерной группой когомологий с коэффициентами в  $\mathbb{Z}_2$*  2-комплекса  $K^*$ .) Препятствием Ван Кампена по модулю 2  $v(K) \in H^2(K^*; \mathbb{Z}_2)$  называется класс когомологичности расстановки пересечений некоторого (или, эквивалентно, любого) PLGP отображения  $f : K \rightarrow \mathbb{R}^2$ . Лемма 1.5.6 и утверждение 1.5.7 переформулируются так:

- класс  $v(K)$  определен корректно, т.е. не зависит от выбора отображения  $f$ .
- граф  $K$  является  $\mathbb{Z}_2$ -планарным тогда и только тогда, когда  $v(K) = 0$ .

(b) Denote the set of skew-symmetric (cf. Assertion 1.5.9.a) maps  $\tilde{K} \rightarrow \mathbb{Z}$  up to skew-symmetric cohomology by  $H_{ss}^2(\tilde{K}; \mathbb{Z})$ . A skew-symmetric cohomology class of the integral intersection cocycle of some (or, equivalently, of any) general position PL map  $f : K \rightarrow \mathbb{R}^2$  is called *the integral van Kampen obstruction*  $V(K) \in H_{ss}^2(\tilde{K}; \mathbb{Z})$ , see Remarks 1.5.13, 1.7.4.

(c) If in §1.5.4 we assume that cells  $\sigma \times \tau$  and  $\tau \times \sigma$  of  $\tilde{K}$  (considered as a cell complex) are oriented coherently with the involution  $(x, y) \xleftrightarrow{t} (y, x)$  (and so not necessarily oriented as the products), and define the intersection cochain by assigning the number  $f\sigma \cdot f\tau$  to the cell  $\sigma \times \tau$  oriented as the product (and so not necessarily positively oriented), then we obtain symmetric cochains / coboundaries / cohomology and the van Kampen obstruction in the group  $H_s^2(\tilde{K}; \mathbb{Z}) \cong H^2(K^*; \mathbb{Z})$ . We have  $H_s^2(\tilde{K}; \mathbb{Z}) \cong H_{ss}^2(\tilde{K}; \mathbb{Z})$ . The two van Kampen obstructions go one to the other under this isomorphism. Analogous remark holds for the van Kampen obstruction for embedding of  $n$ -complexes in  $\mathbb{R}^{2n}$  [Sh57, §3], [Sk06, §4.4].

I am grateful to S. Melikhov for indicating that in [FKT, §2.3] the signs are not accurate [Me06, beginning of §1]. The sign error is in the fact that for  $n := \dim K$  odd and  $o_f$  the integer intersection cocycle *both* equalities  $o_f(\sigma \times \tau) = f\sigma \cdot f\tau$  [FKT, §2.3, line 7] and  $t(\sigma \times \tau) = \tau \times \sigma$  [FKT, p. 168, line -4] for each  $\sigma, \tau$  cannot be true. If cells  $\sigma \times \tau$  are oriented as the products (as in [Sh57, §3], [Sk06, §4.4]), then  $o_f(\sigma \times \tau) = f\sigma \cdot f\tau$  but  $t(\sigma \times \tau) = (-1)^n \tau \times \sigma$ . If cells  $\sigma \times \tau$  are oriented coherently with the involution  $t$  (as in [Me06, §2, Equivariant cohomology and Smith sequences]), then  $t(\sigma \times \tau) = \tau \times \sigma$  but either  $o_f(\sigma \times \tau) = -f\sigma \cdot f\tau$  or  $o_f(\tau \times \sigma) = -f\tau \cdot f\sigma$ . (The orientation assumption is not explicitly introduced in [FKT, §2].)<sup>17</sup>

Definitions of the van Kampen obstruction in §1.5.4 (and in [MTW, Appendix D]) use the product orientation on  $\sigma \times \tau$  and do not mention the wrong (for  $n$  odd and this orientation convention) formula  $t(\sigma \times \tau) = \tau \times \sigma$ . So they do not have the sign error.

---

<sup>17</sup>I am grateful to V. Krushkal for helping me to locate the sign error in [FKT, §2.3]. The more so because the explanation in [Me06, §3, footnote 6] of the sign error is confusing. Indeed, in [Me06, §2] the ‘coherent’ orientation is fixed, and without change of the orientation convention in [Me06, §3, Geometric definition of  $\vartheta(X)$ ] the ‘product’ orientation is used (otherwise the formula  $t(\sigma \times \tau) = (-1)^n \tau \times \sigma$  is incorrect for  $n$  odd). The sign error appears exactly because of difference between these orientation conventions.

## 2 Неотъемлемые пересечения для плоскости

### 2.1 Линейные теоремы о неотъемлемых пересечениях

**Утверждение 2.1.1** (ср. утверждение 1.1.1.a). *Для любых 4 точек на плоскости либо одна из них лежит внутри треугольника, образованного оставшимися точками, либо их можно разбить на две пары так, что отрезок, соединяющий точки в первой паре, пересекает отрезок, соединяющий точки во второй паре.*

Следующие примеры показывают, что утверждение 2.1.1 является «наилучшим».

- На плоскости возьмем треугольник и точку внутри него. Для любого разбиения этих четырех точек на две пары отрезков, соединяющий точки в первой паре, не пересекает отрезок, соединяющий точки во второй паре.

- На плоскости возьмем вершины квадрата. Ни одна из этих четырех точек не лежит внутри треугольника, образованного оставшимися точками.

Доказательства утверждений 2.1.1 и 2.1.2 приведены в п. 2.4.

**Выпуклой оболочкой**  $\langle X \rangle$  конечного набора  $X$  точек плоскости называется наименьший (по включению, или по площади) выпуклый многоугольник, их содержащий. Ср. с определением в п. 7.1.

Утверждение 2.1.1 переформулируется так: *любые 4 точки на плоскости можно разбить на два множества, выпуклые оболочки которых пересекаются.* Вот более сильная «количественная» версия.

**Утверждение 2.1.2** (ср. утверждение 1.1.1.b). *Если никакие три из 4 точек на плоскости не лежат на прямой, то существует ровно одно их разбиение на два множества, выпуклые оболочки которых пересекаются.*

Рассмотрим теперь разбиения подмножеств плоскости более чем на два непересекающихся множества.

**Пример 2.1.3.** *На плоскости возьмем по  $r-1$  точке в каждой вершине треугольника (или близкий набор различных точек). При любом разбиении этих  $3r-3$  точек на  $r$  множеств выпуклые оболочки этих множеств не имеют общей точки. (Докажите, начав с  $r=3$ .)*

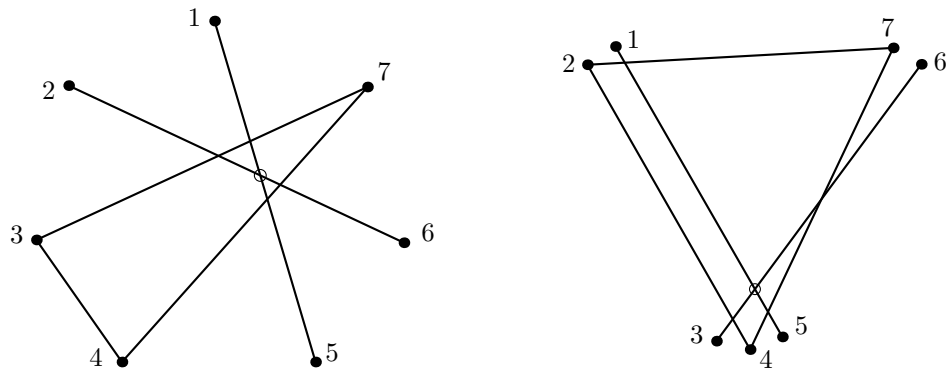


Рис. 2.1.1: К теореме 2.1.4: общая точка выпуклых оболочек

**Теорема 2.1.4** (Тверберг). *Для любого  $r$  любые  $3r-2$  точки плоскости можно разбить на  $r$  множеств, выпуклые оболочки которых имеют общую точку.*

Следующие примеры показывают, что теорема 2.1.4 является «наилучшей» для  $r = 3$ .

- На плоскости возьмем вершины выпуклого 7-угольника. Тогда ни одна из вершин не лежит ни в одном из треугольников, образованных оставшимися точками.

- На плоскости отметим вершины правильного треугольника и его центр. Отметим также середины отрезков, соединяющих вершины с центром. Возьмем любые два отрезка, соединяющие две непересекающиеся пары отмеченных точек. Тогда либо эти отрезки не пересекаются, либо их точка пересечения не лежит в треугольнике, образованном тремя оставшимися отмеченными точками.<sup>18</sup>

Мотивированное изложение алгебраического доказательства теоремы 2.1.4 см. в [RRS]. Было бы интересно найти геометрическое доказательство, хотя бы для  $r = 3$ . Геометрические доказательства более слабых утверждений приведены в п. 2.4.

**Пример 2.1.5** (ср. утверждение 2.1.2). *Для множества вершин правильного семиугольника количество разбиений из теоремы 2.1.4 равно 7. Каждое такое разбиение получается поворотом из разбиения на рис. 2.1.1 слева.*

*Для множества точек, изображенного на рис. 2.1.1 справа, количество разбиений из теоремы 2.1.4 равно 4.*

*(Это следует из того, что в любом таком разбиении одна из выпуклых оболочек должна быть треугольником, одна из вершин которого — 4, другая — 1 или 2, и третья — 6 или 7.)*

*Таким образом, следующая сумма имеет разную четность для двух рассмотренных выше 7-элементных множеств  $M_1$  и  $M_2$*

$$v(M_i) := \sum_{\{R_1, R_2, R_3\} : M_i = R_1 \sqcup R_2 \sqcup R_3} |\langle R_1 \rangle \cap \langle R_2 \rangle \cap \langle R_3 \rangle|.$$

*Однако этот пример подсказывает, что количество разбиений из теоремы 2.1.4 есть число вида  $3k + 1$ . Это верно, только если в приведенной сумме удачно расставить знаки  $\pm 1$  перед слагаемыми.*

## 2.2 Топологическая теорема о двукратных пересечениях

Любое подмножество плоскости разбивается на *компоненты (связности)*, такие что любые две точки одной компоненты можно соединить ломаной, лежащей в подмножестве, а никакие две точки из разных компонент — нельзя.

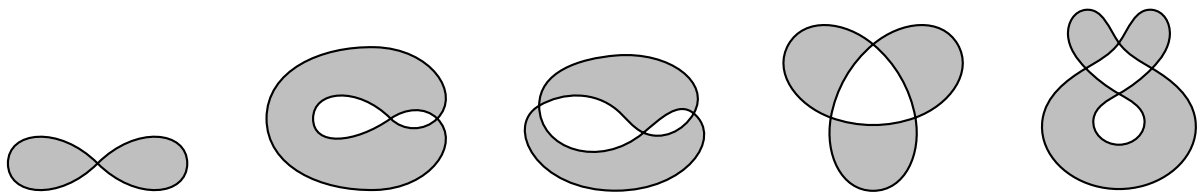


Рис. 2.2.1: Шахматные раскраски и внутренности по модулю 2

**Задача 2.2.1.** Возьмем замкнутую плоскую ломаную  $l$ , вершины которой находятся в общем положении.

<sup>18</sup>Докажем это. Любую пару пересекающихся отрезков можно движением перевести в одну из пар  $\{AB_1, BA_1\}, \{AO, A_1B_1\}, \{AO, BA_1\}$ . Также  $A_1 = AO \cap A_1B_1 = AO \cap A_1B$  не лежит ни в  $\triangle BC_1C$ , ни в  $\triangle B_1C_1C$ , а  $AB_1 \cap BA_1$  не лежит в  $\triangle OC_1C$ .

(а) Дополнение  $\mathbb{R}^2 - l$  допускает «шахматную раскраску», такую что компоненты дополнения, соседствующие по некоторому отрезку ломаной, покрашены в разные цвета, см. рисунок 2.2.1

(б) Концы ломаной  $p$ , вершины которой находятся в общем положении с вершинами ломаной  $l$ , имеют одинаковый цвет тогда и только тогда, когда  $|p \cap l|$  четно.

*Hint.* (а) Возьмем точку  $A \notin l$  и покрасим ее в цвет 0. Каждую точку  $X \notin l$  покрасим в цвет 0 или 1, совпадающий по четности с числом точек пересечения с  $l$  пути, соединяющего  $X$  с  $A$ , все вершины которого, кроме  $X$ , вместе с вершинами ломаной  $l$ , находятся в общем положении. Такая раскраска корректно определена по лемме о четности.

При переходе в соседнюю область число точек пересечения из предыдущего абзаца увеличивается на 1, поэтому соседние области покрашены в разные цвета.

**Внутренностью по модулю 2** плоской ломаной, вершины которой находятся в общем положении, называется объединение черных областей шахматной раскраски ее дополнения (при условии, что «бесконечная» область белая). См. подробнее [ABM+, §2].

Кусочно-линейные (PL) и PL общего положения (PLGP) отображения графа в плоскость определены в §1.4.

**Теорема 2.2.2** (Топологическая теорема Радона для плоскости [BB79], ср. теоремы 1.4.1 и 2.1.1). (а) Для любого PLGP отображения  $f : K_4 \rightarrow \mathbb{R}^2$  либо

- образы некоторых несмежных ребер пересекаются, либо
- образ некоторой вершины лежит во внутренней по модулю 2 образа цикла из трех ребер, не содержащих эту вершину.

(б) Для любого непрерывного (или PL) отображения тетраэдра в плоскость либо

- образы некоторых противоположных ребер пересекаются, либо
- образ некоторой вершины лежит в образе противоположной грани.

*Набросок доказательства.* Пункт (а) выводится из своей «количественной» версии (лемма 2.2.3) с помощью аппроксимации, ср. замечание 7.2.3.b и [Sk20, лемма 1.4.6.b].

Пункт (б) для PLGP отображения следует из п. (а), поскольку образ  $f(\Delta)$  грани  $\Delta$  содержит внутренность по модулю 2 образа границы  $\partial\Delta$  этой грани. (Это следует из замечания 1.3.6.b или [Sk20, утверждение 3.6.2]; для PLGP отображения  $f : \Delta \rightarrow \mathbb{R}^2$  любая точка внутренней по модулю 2 ломаной  $f|_{\partial\Delta}$  имеет нечетное число прообразов.) Пункт (б) выводится из п. (б) для PLGP отображений с помощью аппроксимации. (Заметим также, что п. (б) эквивалентен п. (а), см. [Sc04, SZ05].)  $\square$

Для PLGP отображения  $f$  образы любых двух несмежных ребер пересекаются в конечном числе точек (по утверждению 1.3.1). **Числом Радона**  $\rho(f) \in \mathbb{Z}_2$  называется сумма четностей

- числа точек пересечения образов несмежных ребер, и
- числа тех вершин графа  $K_4$ , образы которых лежат во внутренней по модулю 2 образа цикла из трех ребер, не содержащих эту вершину.<sup>19</sup>

**Лемма 2.2.3** (ср. лемму 1.4.3 и утверждение 2.1.2). Для любого PLGP отображения графа  $K_4$  в плоскость число Радона нечетно.

*Доказательство.* Ввиду утверждения 2.1.2 лемма верна для отображений, при которых образ каждого ребра является отрезком, концы которого — образы концов ребра. Поэтому достаточно доказать, что  $\rho(f) = \rho(f')$  для любых двух PLGP отображений

<sup>19</sup>For a PLGP map  $g$  of a tetrahedron to the plane one can define the *van Kampen number*  $v(g) \in \mathbb{Z}_2$  [Sk16, §4.2] so that  $v(g) = \rho(g|_{K_4})$ .



$f, f' : K_4 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , отличающихся только на внутренности одного ребра  $\sigma$ , причем  $f|_\sigma$  линейно. Обозначим через  $\tau$  ребро графа  $K_4$ , несмежное с  $\sigma$ , а через  $S$  — внутренность по модулю 2 ломаной  $\partial S := f\sigma \cup f'\sigma$ . Тогда

$$\rho(f) - \rho(f') = |\partial S \cap f\tau|_2 + |S \cap f(\partial\tau)|_2 = 0.$$

Здесь второе равенство следует из утверждения 2.2.1.b.<sup>20</sup> □

## 2.3 Топологическая теорема о многократных пересечениях

Топологическая теорема Тверберга для плоскости обобщает как теорему Тверберга для плоскости 2.1.4, так и топологическую теорему Радона для плоскости 2.2.2. Для формулировки понадобится следующее определение. **Числом оборотов** замкнутой плоской ломаной  $l = A_1 \dots A_n$  вокруг не лежащей на ней точки  $O$  называется следующая сумма ориентированных углов, деленная на  $2\pi$ :

$$w(l) = w(l, O) := (\angle A_1 O A_2 + \angle A_2 O A_3 + \dots + \angle A_{n-1} O A_n + \angle A_n O A_1) / 2\pi.$$

См. подробнее [ABM+, §§1,2], [Wn].

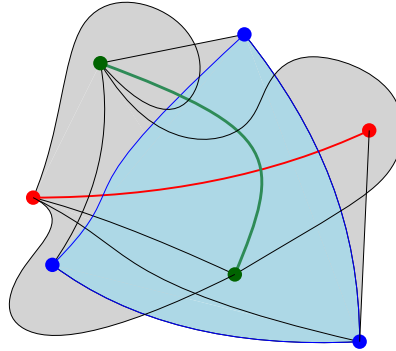


Рис. 2.3.1: К топологической теореме Тверберга для плоскости для  $r = 3$ : контур синего треугольника обходит вокруг точки пересечения красного и зеленого отрезков

**Теорема 2.3.1** (Топологическая теорема Тверберга для плоскости [BSS, Oz, Vo96]; ср. с теоремами 2.1.4, 2.2.2 и гипотезой 7.3.1). *Если  $r$  — степень простого, то для любого PL отображения  $f : K_{3r-2} \rightarrow \mathbb{R}^2$  либо*

- образы  $r - 1$  треугольников обходят вокруг образа одной вершины, либо
- образы  $r - 2$  треугольников обходят вокруг некоторой точки пересечения образов двух ребер,

где треугольники, ребра и вершины попарно не пересекаются.

Точнее, можно так занумеровать вершины числами  $1, \dots, 3r - 2$ , что либо

- число оборотов образа каждого из циклов  $3t - 1, 3t, 3t + 1$ ,  $t = 1, 2, 3, \dots, r - 1$ , вокруг образа точки 1 не равно нулю, либо

- число оборотов образа каждого из циклов  $3t - 1, 3t, 3t + 1$ ,  $t = 2, 3, \dots, r - 1$ , вокруг некоторой точки пересечения образов ребер  $12$  и  $34$  не равно нулю.

(Условие «число оборотов не равно нулю» не зависит от ориентации цикла  $f(ijk)$ .)

<sup>20</sup>Имеется прямое доказательство того, что число ван Кампена PLGP отображения  $K_5 \rightarrow \mathbb{R}^2$  совпадает с числом Радона своего ограничения на  $K_4$  [Sk16, §4.2]. Таким образом, леммы 2.2.3 и 1.4.3 могут быть выведены друг из друга напрямую.

Теорема 2.3.1 эквивалентна ([Sc04, Теорема 3.3.1], [SZ05, Теорема 5.8]) ее стандартной формулировке — теореме 7.3.2.a для  $d = 2$ . О ее доказательстве и удивительном появлении теоретико-числового условия на размерность в этом топологическом результате см. замечание 7.3.7.a. Даже для доказательства *маломерной* теоремы Тверберга 2.3.1 необходимо обобщение *многомерной* теоремы Борсука-Улама 6.5.4.

Нерешенная задача: *верен ли аналог теоремы 2.3.1 для  $r = 6$ ? а если  $r$  — не степень простого?* Количественная версия теорем 2.1.4 и 2.3.1 неизвестна!

## 2.4 Приложение: некоторые детали к §2.1 и к §2.2

**2.1.1.** Рассмотрим четверку точек  $A, B, C, D$  на плоскости.

Если какие-то 3 из них лежат на одной прямой, то некоторая из них, скажем  $B$ , лежит на отрезке между двумя другими, например, между  $A$  и  $C$ . Обозначим через  $[XY]$  отрезок с вершинами  $X, Y$ . Тогда  $[AC] \cap [BD] \neq \emptyset$ .

Значит, никакие 3 точки не лежат на одной прямой. Если одна из этих точек лежит внутри треугольника, образованного остальными, то задача решена. Иначе каждая из этих точек лежит снаружи треугольника, образованного остальными. Поскольку точка  $D$  снаружи  $\triangle ABC$ , то она либо внутри одного из углов, вертикальных углам  $\triangle ABC$ , либо внутри одного из углов  $\triangle ABC$ .

*Случай 1.* Точка  $D$  внутри одного из углов, вертикальных углам  $\triangle ABC$ . Без ограничения общности,  $D$  внутри угла, вертикального углу  $\angle ACB$ . Тогда точка  $C$  внутри  $ABD$ , противоречие.

*Случай 2.* Точка  $D$  внутри одного из углов  $\triangle ABC$ , скажем  $\angle BAC$ . Поскольку точка  $D$  вне  $\triangle ABC$  и внутри угла  $BAC$ , то точки  $D$  и  $A$  лежат по разные стороны от прямой  $BC$ . Следовательно, отрезки  $[AD]$  и  $[BC]$  пересекаются.

**2.1.2.** Так как точки общего положения, то их выпуклая оболочка — или треугольник, или четырехугольник. Если выпуклая оболочка данных 4 точек — четырехугольник, то нужная («радоновская») точка — точка пересечения диагоналей. Если же выпуклая оболочка — треугольник, то нужная точка — та точка множества, которая не является вершиной его выпуклой оболочки.

**2.1.3. Другое построение.** (a) Возьмем 6 вершин выпуклого шестиугольника, которые являются точками общего положения. Если в каком-то из 3 множеств разбиения одна точка, то из-за выпуклости шестиугольника эта точка не лежит внутри выпуклой оболочки любого множества оставшихся точек, следовательно у трех наших оболочек нет общей точки. Если же в каждом из множеств разбиения по 2 точки, то наши оболочки — это 3 отрезка. Так как наши точки общего положения, то эти отрезки не имеют общей точки.

(b) Предположим противное. Возьмем выпуклый  $(3r - 3)$ -угольник, никакие 3 диагонали которого не пересекаются в одной точке. По принципу Дирихле, среди множеств разбиения есть либо множество из 1 вершины, либо 3 множества из 2 вершин. В первом случае получаем противоречие вследствие выпуклости многоугольника, во втором случае — благодаря общности положения вершин.

*Доказательства аналогов теоремы 2.1.4. Для  $r = 3$  и вершин выпуклого восьмиугольника.* См. рис. 2.4.1. Обозначим вершины восьмиугольника в порядке обхода через 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8. Разобьем их на три множества  $\{1, 3, 5, 7\}$ ,  $\{2, 6\}$  и  $\{4, 8\}$ . Их выпуклые оболочки — четырехугольник 1357 и отрезки 26, 48, соответственно. Clearly, segments 26 and 48 have an intersection point, say  $A$ . Clearly,  $A$  does not belong to any of the triangles 123, 345, 567, 781. Поэтому три выпуклые оболочки имеют общую точку.  $\square$

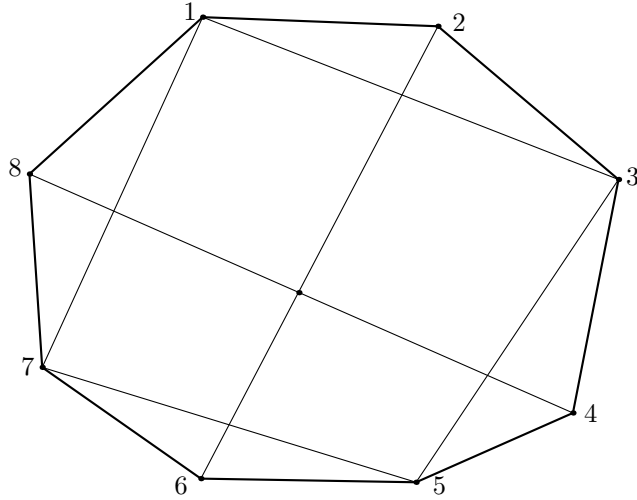


Рис. 2.4.1: Выпуклый восьмиугольник

Для  $r = 3$  и 11 точек. Если у выпуклой оболочки данных 11 точек не менее 8 вершин, то результат доказан выше. Если же у ней менее 8 вершин, то обозначим через  $S$  множество этих вершин. Оставшихся точек не менее 4. Поэтому их можно разбить на два множества выпуклые оболочки которых пересекаются. Это пересечение будет лежать и в выпуклой оболочке множества  $S$ .  $\square$

Для  $r = 3$  и вершин выпуклого семиугольника. (Предварительная версия написана А. Львовым и Т. Ковалевым. Аналогичное решение придумано В. Кулишовым.)

Обозначим вершины семиугольника в порядке обхода через 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7.

Если  $X := 37 \cap 26 \in \Delta 145$ , то разбиение 37, 26, 145 — искомое («тверберговское»).

Если  $X \notin \Delta 145$ , то не умаляя общности можно считать, что  $X$  лежит внутри четырехугольника 1567. Так как  $X$  не лежит внутри пятиугольника 12345, то  $Y := 15 \cap 37$  не лежит внутри четырехугольника 1267. Так как  $15 \cap \Delta 234 = \emptyset$ , то  $Y \notin \Delta 234$ . Так как  $37 \cap \Delta 456 = \emptyset$ , то  $Y \notin \Delta 456$ . Поэтому  $Y \in \Delta 246$ . Значит, разбиение 15, 37, 246 — искомое.  $\square$

Следующие доказательства написаны И. Богдановым и А. Полянским.

*Теорема о центральной точке.* Для любых  $3k$  точек на плоскости найдется такая точка плоскости, что любая полуплоскость, содержащая эту точку, содержит не менее  $k$  точек из данных  $3k$ .

*Доказательство.* Рассмотрим выпуклые оболочки любых  $2k + 1$  и более точек. По теореме Хелли все они имеют общую точку  $O$  (т.к. любые три из них имеют общую точку). Докажем, что точка  $O$  центральная. Если это не так, то существует такая прямая, проходящая через  $O$ , такая что одна из полуплоскостей, содержащая точку  $O$ , содержит менее  $k$  точек. Значит, ее дополнение содержит более  $2k$  точек. Значит, многоугольник, образованный этими  $2k$  точками, содержит точку  $O$ . Противоречие.  $\square$

*Доказательства аналогов теоремы 2.1.4. Для  $9r$  точек.* Центральная точка  $O$  лежит в выпуклой оболочке любых  $6r + 1$  из данных точек. Т.е. из любых  $6r + 1$  данных точек можно выбрать три таких, что треугольник с вершинами в них содержит  $O$ . Будем выбирать такие треугольники, выкидывать их, выбирать новые и т.д. Это можно сделать хотя бы  $r$  раз.

Для  $3r$  точек. Пронумеруем точки от 1 до  $3r$  так, чтобы номера нестрого возрастали по часовой стрелке относительно центральной точки  $O$ . Так как точка  $O$  центральная, то она лежит в треугольнике с вершинами  $i, i + r, i + 2r \pmod{3r}$ .  $\square$

**Замечание 2.4.1.** Пусть  $f : K \rightarrow \mathbb{R} - \text{PL}$  отображение графа  $K$ , переводящее вершины в различные точки, отличные от «точек возврата» ребер (PLGP отображение).

(а) *Топологическая теорема Радона для прямой.* Для любого непрерывного отображения треугольника в прямую образ некоторой вершины лежит на образе противоположного ребра.

*Доказательство.* Образ одной из вершин треугольника лежит не строго между образами двух других. Так как отображение непрерывно, то образ этой вершины и лежит на образе противоположного ребра.

(b) Граф называется *k-реализуемым на прямой*, если его вершины можно расположить на плоскости так, чтобы любая прямая, перпендикулярная некоторой фиксированной прямой, пересекала объединение отрезков, соответствующих ребрам графа, не более чем в  $k$  точках. Другими словами, если существует отображение графа в прямую, при котором любая точка прямой имеет не более  $k$  прообразов.

Ясно, что связный граф 1-реализуем на прямой тогда и только тогда, когда он является путем. О критерии 2-реализуемости деревьев см. [Kho] и ссылки в этой статье. Интересно найти критерий и эффективный алгоритм распознавания  $k$ -реализуемости.

(c) Для любых distinct points  $x, y, z, t \in \mathbb{R}$  the following number is even:

$$|x \cap [z, t]| + |y \cap [z, t]| + |[x, y] \cap z| + |[x, y] \cap t|.$$

(d) *Расстановкой пересечений* назовем сопоставление числа  $|f(a) \cap f(\sigma)|$  каждой паре  $a, \sigma$  из вершины и не содержащего ее ребра. Как меняется расстановка пересечений при изменении отображения  $f$ ? Размышляя об этом, Вы придете к определениям из пп. (e, f). Начните с придумывания аналога преобразований Райдемайстера на рис. 1.5.1.

(e) Неформально говоря, графом  $K^{*(1)}$  называется множество неупорядоченных пар  $\{x, y\}$  точек графа  $K$  (точнее, его тела), одна из которых является вершиной, а другая лежит на стороне, не смежной с этой вершиной. Формально, вершины графа  $K^{*(1)}$  — неупорядоченные пары  $\{a, b\}$  различных вершин графа  $K$ . Для каждой вершины  $a$  и не содержащего ее ребра  $bc$  в графе  $K$  соединим ребром в графе  $K^{*(1)}$  вершины  $\{a, b\}$  и  $\{a, c\}$ . Это ребро обозначается  $\{a, bc\}$ . Других ребер в графе  $K^{*(1)}$  нет. Ср. с определением графа  $K^{\square 2}$  после утверждения 1.6.2.

Какие графы  $K^{*(1)}$  получатся, если  $K$  — цикл с тремя вершинами, триод,  $K_4$ ?

(f) Определения кограницы и когомологичности приведены после утверждения 9.2.3.

*Гипотеза.* Существует отображение  $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ , такое что  $f(a) \notin f(\sigma)$  для любых вершины  $a$  и ребра  $\sigma \not\ni a$  (т.е. *почти вложение*) тогда и только тогда, когда расстановка пересечений некоторого PLGP отображения  $K \rightarrow \mathbb{R}$  когомологична нулевой.

(g) *Коциклом* называется такая расстановка нулей и единиц на ребрах графа  $K^{*(1)}$ , что сумма четырех чисел ребрах  $\{a, cd\}$ ,  $\{b, cd\}$ ,  $\{c, ab\}$ ,  $\{d, ab\}$  четна для любых непересекающихся ребер  $ab, cd$  графа  $K$ . Ввиду п. (c) расстановка пересечений — коцикл. Кроме того,  $\delta_{K^{*(1)}}\{a, b\}$  — коцикл.

(h)\* Для каждой коцикла  $\nu$  и неупорядоченной пары  $\{ab, cd\}$  непересекающихся ребер графа  $K$  обозначим через

$$\text{Sq}^1 \nu \{ab, cd\} := \nu \{a, cd\} + \nu \{b, cd\} = \nu \{ab, c\} + \nu \{ab, d\}$$

сумму двух чисел на «противоположных» ребрах «прямоугольника»  $ab \times cd$ . Получится отображение  $\text{Sq}^1 \nu : K^* \rightarrow \mathbb{Z}_2$ .

$$\text{Тогда } \text{Sq}^1(\mu + \nu) = \text{Sq}^1 \mu + \text{Sq}^1 \nu \text{ и } \text{Sq}^1 \delta_{K^{*(1)}}\{a, b\} = \sum_{\sigma \ni b} \delta(a, \sigma) =: \delta(a \times \delta_K b).$$

Определим группу  $H^1(K^*)$  как группу коциклов с точностью до когомологичности. Обозначим через  $H^2(K^*)$  группу отображений  $K^* \rightarrow \mathbb{Z}_2$  (т.е. расстановок нулей и единиц на  $K^*$ ) с точностью до когомологичности. Ввиду формул из предыдущего абзаца

квадрат Бокштейна-Стинрода  $\text{Sq}^1 : H^1(K^*) \rightarrow H^2(K^*)$  корректно определен формулой  $\text{Sq}^1[\nu] := [\text{Sq}^1 \nu]$ . (Эту операцию можно определить и для произвольного двумерного комплекса, но мы ограничились необходимым здесь частным случаем, в котором определение проще. Можно определить билинейное умножение Колмогорова-Александера  $\smile : H^1(K^*) \times H^1(K^*) \rightarrow H^2(K^*)$ , для которого  $\text{Sq}^1 x = x \smile x$ .)

(i) Препятствием Ван Кампена  $v_1(K) \in H^1(K^*)$  к  $\mathbb{Z}_2$ -вложимости графа  $K$  в прямую называется класс кохомологичности расстановки пересечений  $\nu_1(f)$  (PLGP отображения  $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ ). Корректность определения проверяется аналогично лемме 1.5.6.

Препятствием Ван Кампена  $v(K) \in H^2(K^*)$  к  $\mathbb{Z}_2$ -вложимости графа  $K$  в плоскость называется класс кохомологичности расстановки пересечений  $\nu(g)$  (PLGP отображения  $g : K \rightarrow \mathbb{R}^2$ ).

Тогда  $v(K) = \text{Sq}^1 v_1(K)$ .

Указание. Возьмем линейное отображение  $g : K \rightarrow \mathbb{R}^2$ , образы вершин при котором лежат на окружности (см. пример 1.5.2). Обозначим через  $f : K \rightarrow \mathbb{R}^1$  композицию отображения  $g$  и проекции на ось  $Ox$ . Тогда  $\text{Sq}^1 \nu_1(f) = \nu(g)$ .

**Утверждение 2.4.2** (маломерная версия леммы о кольцах Борромео 6.14.7.b). *На плоскости даны две замкнутые ломаные  $a, b$  (возможно, самопересекающиеся) и точки  $P_{aa}, P_{ab}, P_{ba}, P_{bb}$ . Вершины ломаных и эти точки находятся в общем положении. Ломаная  $a$  пересекает каждый из отрезков  $P_{aa}P_{ab}$  и  $P_{ba}P_{bb}$  в четном количестве точек, а каждый из отрезков  $P_{aa}P_{ba}$  и  $P_{ab}P_{bb}$  — в нечетном. Ломаная  $b$ , наоборот, пересекает каждый из отрезков  $P_{aa}P_{ab}$  и  $P_{ba}P_{bb}$  в нечетном количестве точек, а каждый из отрезков  $P_{aa}P_{ba}$  и  $P_{ab}P_{bb}$  — в четном. Тогда ломаные  $a$  и  $b$  пересекаются.*

*Доказательство.* Так как вершины ломаной  $a$  находятся в общем положении, то части, на которые она разбивает плоскость можно раскрасить в черный и белый цвета так, что соседние части разноцветны (см. утверждение 2.2.1). Обозначим через  $\alpha$  объединение черных частей. Аналогично построим двумерное множество  $\beta$  по ломаной  $b$ .

*Завершение доказательства.* Если  $a \cap b = \emptyset$ , то одно из множеств  $\alpha \cap \beta$ ,  $\alpha - \beta$ ,  $\beta - \alpha$  или  $\mathbb{R}^2 - \alpha - \beta$  пусто. Не уменьшая общности,  $P_{aa} \in \alpha \cap \beta$  (иначе перекрасим). Тогда  $P_{ab} \in \beta - \alpha$ , значит,  $P_{bb} \in \mathbb{R}^2 - \alpha - \beta$ , поэтому  $P_{ba} \in \alpha - \beta$ . Противоречие.

*Другое завершение доказательства.* Возьмем точку  $C$  в общем положении с вершинами ломаных и точками  $P_{aa}, P_{ab}, P_{ba}, P_{bb}$ . Обозначим через  $\gamma$  объединение отрезков  $CP_{aa} \cup CP_{ab} \cup CP_{ba} \cup CP_{bb}$ .

Если ломаные  $a$  и  $b$  не пересекаются, то  $a \cap \beta$  есть либо  $a$ , либо  $\emptyset$ , и  $\alpha \cap b$  есть либо  $b$ , либо  $\emptyset$ . Тогда следующая цепочка сравнений по модулю 2 дает противоречие.

$$0 \stackrel{(1)}{=} |\partial(\gamma \cap \alpha \cap \beta)| \stackrel{(2)}{=} \underbrace{|\partial\gamma \cap \alpha \cap \beta|}_{=\{P_{aa}, P_{ab}, P_{ba}, P_{bb}\}} + \underbrace{|\gamma \cap \partial\alpha \cap \beta|}_{=a} + \underbrace{|\gamma \cap \alpha \cap \partial\beta|}_{=b} \stackrel{(3)}{=} 1+0+0 = 1.$$

Здесь (1) выполнено, поскольку  $\gamma \cap \alpha \cap \beta$  есть объединение конечного количества невырожденных незамкнутых ломаных, у которых четное число концов. Сравнение (2) доказывается несложно (это «формула Лейбница»).

Докажем сравнение (3). Имеем

$$\partial\gamma \cap \alpha \cap \beta = (\partial\gamma \cap \alpha) \cap (\partial\gamma \cap \beta) = \{P_{aa}, P_{ab}\} \cap \{P_{aa}, P_{ba}\} = \{P_{aa}\}.$$

Если  $a \cap \beta = \emptyset$ , то  $\gamma \cap a \cap \beta = \emptyset$ . Если же  $a \cap \beta = a$ , то

$$|\gamma \cap a \cap \beta| = |\gamma \cap a| = |P_{aa}P_{ba} \cap a| + |P_{ab}P_{bb} \cap a| = 1 + 1 = 0.$$

Итак, в обоих случаях  $|\gamma \cap a \cap \beta| = 0$ . Аналогично  $|\gamma \cap \alpha \cap b| = 0$ .  $\square$

### 3 Устойчивость самопересечений графов на плоскости

#### 3.1 Аппроксимируемость путей вложениями

Начнем с наглядных задач, поясняющих проблему аппроксимируемости вложениями (или устойчивости самопересечений). Общие замечания об этой проблеме приведены в конце пункта.

**Задача 3.1.1.** (а) Охотник гуляет по лесной дорожке, имеющей форму прямолинейного отрезка (длины 1 км). При этом он может менять направление своего движения. Он ведет на поводке длиной 1 м собаку (т.е. расстояние между собакой и охотником не превосходит 1 м). Докажите, что независимо от движения охотника собака может двигаться так, чтобы не пересекать свой след.

(б) То же для дорожки в форме окружности (радиуса 1 км).

(с) Два охотника прошли (равномерно и не меняя направления, в отличие от п. (а) и (б)) по прямолинейным дорожкам, пересекающимся под прямым углом в точке, отстоящей от каждого из их концов на 1 км (рис. 3.1.1, на котором  $\varphi(I_1)$  и  $\varphi(I_2)$  — пути охотников). Каждый из них вел на поводке длиной 1 м собаку. Докажите, что одна собака пересекала следы другой.

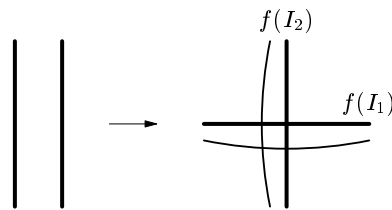


Рис. 3.1.1: Трансверсальное пересечение не аппроксимируемо вложениями,  $f \rightarrow \varphi$

**Задача 3.1.2.** (а) Охотник двигался (равномерно и не меняя направления) по лесной дорожке в форме окружности диаметром 1 км, сделав два оборота. Он вел на поводке длиной 1 м собаку, которая в конце движения тоже вернулась в исходную точку. Докажите, что собака обязательно пересекала свой след (в некоторый момент времени, отличный от конечного).

(б) Верен ли аналог п. (а) без предположения о том, что собака вернулась в исходную точку?

(с)\* Верен ли аналог п. (а) без предположения о равномерности и постоянстве направления?

(д) Верен ли аналог п. (а) для случая, когда охотник сделал *три* оборота?

(е) Для какого числа оборотов верен аналог п. (а)?

Приведем формальные определения.

Ломаная  $A_1 \dots A_n$  называется *поверхинно аппроксимируемой вложениями*, если существует сколь угодно близкая (поверхинно) к ней ломаная без самопересечений. Или, формально, если для любого  $\varepsilon > 0$  существует несамопересекающаяся ломаная  $B_1 \dots B_n$ , для которой  $|A_j B_j| < \varepsilon$  для любого  $j = 1, \dots, n$ . Аналогично определяется *поверхинная аппроксимируемость вложениями замкнутой ломаной* и даже произвольного линейного отображения  $\varphi : G \rightarrow \mathbb{R}^2$  графа  $G$  (см. определение в п. 1.4). Было бы интересно найти аналоги результатов этого параграфа для *поверхинной аппроксимируемости вложениями*. Они сформулированы для следующей кусочно-линейной версии этого понятия.

Далее все отображения считаются кусочно-линейными (п. 1.4), если не оговорено противное (впрочем, определения осмыслены даже для непрерывных отображе-

ний). *Вложением* графа в плоскость его называется изображение без самопересечений (см. формальное определение в п. 1.4). Обозначим через  $I := [0, 1]$  отрезок и через  $S^1 := \{x \in \mathbb{C} : |x| = 1\}$  окружность. Путь  $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  на плоскости называется **аппроксимируемыми вложениями**, если существует сколь угодно близкий к нему путь без самопересечений. Или, формально, если для любого  $\varepsilon > 0$  существует такое вложение  $f : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ , что  $|f(x), \varphi(x)| < \varepsilon$  для любой точки  $x \in I$ . Аналогично определяется аппроксимируемость вложениями цикла  $\varphi : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$  и даже отображения  $\varphi : G \rightarrow \mathbb{R}^2$  произвольного графа  $G$ .

Строгие формулировки задач 3.1.1 и 3.1.2.a таковы:

- если образом  $\varphi(I)$  пути  $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  является отрезок или окружность, то этот путь аппроксимируем вложениями;
- трансверсальное пересечение  $\varphi : I_1 \sqcup I_2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  (рис. 3.1.1) не аппроксимируемо вложениями;
- композиция  $\varphi : S^1 \rightarrow S^1 \subset \mathbb{R}^2$  двукратной намотки и стандартного включения не аппроксимируется вложениями.

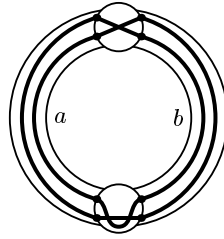


Рис. 3.1.2: Полянки и тропинки

Приведем эквивалентную комбинаторную формулировку задачи 3.1.2.a (аналогично переформулируется общее понятие аппроксимируемости вложениями; эквивалентность доказана в [Mi97]). Рассмотрим две полянки (т.е. два круга), соединенных двумя тропинками (т.е. полосками)  $a$  и  $b$ , как на рис. 3.1.2. Собака бегала по полянкам и тропинкам и вернулась в исходную точку. Каждый раз, когда собака перебежала с полянки на тропинку, она записывала обозначение этой тропинки. В задаче 3.1.2.a утверждается, что если получилась запись  $abab$ , то собака обязательно пересекала свой след (в некоторый момент времени, отличный от конечного).

**Задача 3.1.3.** (a) Путь или цикл в графе называется *эйлеровым*, если он проходит по каждому ребру графа ровно один раз. Эйлеров путь или цикл в графе на плоскости аппроксимируем вложениями тогда и только тогда, когда он не имеет трансверсальных самопересечений (рис. 3.1.1).

(b) Существует путь, не содержащий трансверсальных пересечений и не аппроксимируемый вложениями.

Примеры к задаче 3.1.3.b приведены на рис. 3.1.3, где для наглядности нарисован не сам путь, а близкий к нему путь общего положения. См., впрочем, [Mi97], [Sk03’].

**Задача 3.1.4.** (abcd) Пути на рис. 3.1.3 не аппроксимируемы вложениями.

(Указание. Можно свести к непланарности графов Куратовского  $K_5$  и  $K_{3,3}$ . Пунктирная линия на рис. 3.1.3 поможет сделать это. Другое решение намечено в п. 3.2.)

**Задача 3.1.5.** Обозначим через  $P, H, X$  графы, гомеоморфные буквам  $P, H, X$ . Верно ли, что композиция  $\varphi : K \rightarrow I \subset \mathbb{R}^2$  произвольного отображения и стандартного включения аппроксимируема вложениями, если

- (a)  $K = S^1$ ;   (b)  $K = P$ ;   (c)  $K = H$ ;   (a)  $K = X$ ?

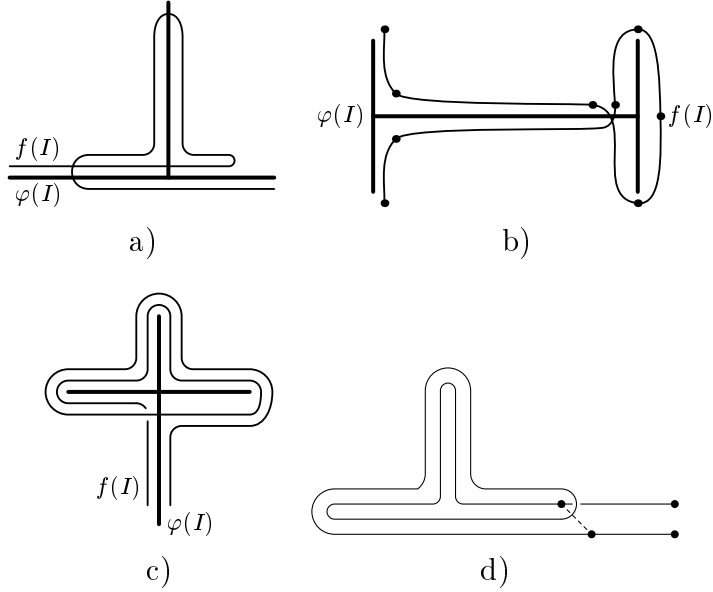


Рис. 3.1.3: Пути, не аппроксимируемые вложениями

(Ваши ответы позволят описать все пары  $(K, L)$  графов, для которых композиция  $\varphi : K \rightarrow L \subset \mathbb{R}^2$  произвольного отображения и некоторого включения аппроксимируема вложениями.)

**Замечания.** Проблема аппроксимируемости путей вложениями интересна с точки зрения топологии, теории графов и компьютерной науки, см. [Sk16'] и ссылки там. Эта проблема похожа на классическую проблему планарности графов (§1) и даже сводится к распознаванию планарности графов [Sk94]. (Впрочем, число графов, планарность которых надо выяснить для одного данного пути, велико.) Нетрудно доказать, что *проблема аппроксимируемости вложениями алгоритмически разрешима* [Sk94, Sk03']. Однако интересно получить *быстрый* алгоритм распознавания аппроксимируемости вложениями. Критерий в терминах препятствия Ван Кампена (см. далее) дает полиномиальный алгоритм. Для проблемы аппроксимируемости вложениями аналога критерия Куратовского 1.2.3.e не существует [Sk03'].

**Задача 3.1.6.** Пара путей  $\varphi, \psi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$  на плоскости называется *разводимой*, если существуют сколь угодно близкие к ним пути без пересечений. Или, формально, если для любого  $\varepsilon > 0$  существуют такие пути  $f, g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ , что расстояние между точками  $f(x)$  и  $\varphi(x)$ , а также между  $g(x)$  и  $\psi(x)$ , меньше  $\varepsilon$  для любой точки  $x \in [0, 1]$ . (Для отображений *графов* в плоскость можно ввести аналогичное понятие разводимости и поставить аналогичные проблемы.)

(a) Если образами путей  $\varphi, \psi : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  являются отрезок или окружность (один и тот же образ у двух разных путей), то эти пути разводимы.

(b) Существует не разводимая пара путей, не содержащая трансверсальных пересечений.

(c)\* Найдите полиномиальный алгоритм распознавания разводимости для кусочно-линейных путей на плоскости.

(d) Обозначим через  $T$  граф, гомеоморфный букве  $T$ . Существует не разводимое отображение  $T \sqcup T \rightarrow T \subset \mathbb{R}^2$ .



### 3.2 Идея построения препятствия Ван Кампена

Чтобы объяснить идею построения препятствия Ван Кампена, приведем наброски некоторых решений. Ср. с утверждениями 1.1.1.b, 1.4.3 и примером 1.4.2.

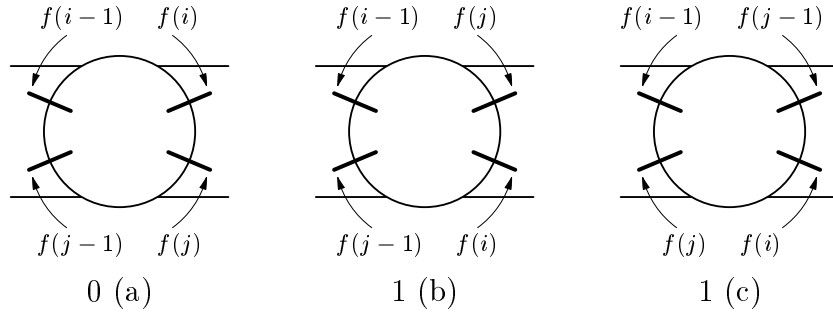


Рис. 3.2.1: Как ставятся числа на полянке

*Набросок первого решения задачи 3.1.2.a.* Возьмем полянки и тропинки для пути  $\varphi$  (рис. 3.1.2).

Назовем путь собаки *незатейливым*, если во время движения по тропинкам она не пересекала свои следы. Достаточно доказать утверждение задачи для незатейливых путей.

Выберем произвольный незатейливый путь  $f$ . Поставим на каждой полянке ноль, если точки входа собаки на полянку и ее выхода с полянки располагаются, как на рис. 3.2.1.a, и единицу в противном случае, как на рис. 3.2.1.b,c. Обозначим через  $v(f)$  сумму по модулю 2 этих двух чисел. Для пути  $f$  собаки на рис. 3.1.2  $v(f) = 1$ . Ясно, что  $v(f)$  зависит только от расположения отрезков пути собаки на тропинках. При изменении такого расположения на одной тропинке число на каждой полянке изменится, поэтому  $v(f)$  не изменится. Так как от любого расположения отрезков пути на тропинках можно перейти к любому другому указанными операциями, то  $v(f) = 1$  для *любого* незатейливого пути  $f$ . Поэтому собака обязательно пересекала свой след. QED

*Набросок второго решения задачи 3.1.2.a.* Разделим время равномерного движения охотника на шесть равных промежутков. Пусть  $e_1, \dots, e_6$  — соответствующие отрезки пути  $f$  собаки. Положим  $e_{i+6} := e_i$ . Можно считать, что этот путь общего положения. Тогда любые два из отрезков  $e_i$  пересекаются в конечном числе точек. Положим

$$v(f) := \sum_{\{i,j\} : |i-j|>1} |e_i \cap e_j| \pmod{2}.$$

Для пути  $f_0$  собаки, показанного на рис. 3.1.2  $v(f_0) = 1$ .

Аналогично лемме 1.4.3  $v(f)$  не зависит от  $f$ . Действительно, если отображения  $f$  и  $f'$  отличаются только внутренностью пути  $e_i \neq e'_i$  (рис. 3.2.2), то

$$v(f) - v(f') = |(e_i \cup e'_i) \cap (e_{i+2} \cup e_{i+3} \cup e_{i+4})| \pmod{2} = 0.$$

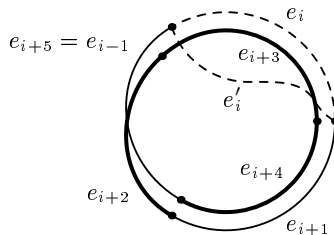


Рис. 3.2.2: Независимость  $v(f)$  от  $f$

Последнее равенство справедливо, поскольку путь  $e_{i+2} \cup e_{i+3} \cup e_{i+4}$  можно замкнуть до цикла, не добавляя новых пересечений с циклом  $e_i \cup e'_i$ . (мы не доказываем это интуитивно очевидное утверждение). Вывод независимости из этого частного случая аналогичен лемме 1.4.3. Следовательно, любой путь собаки имеет самопересечения. QED

Путь  $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  называется *симплициальным*, если существует разбиение отрезка на такие отрезочки, что на каждом отрезочке путь линейен, и что образы любых двух отрезочков не пересекаются или совпадают. Или, формально, если для некоторого  $n$  существуют такие числа  $0 = a_0 < a_1 < \dots < a_n = 1$ , что

- (1) сужение  $\varphi|_{[a_{i-1}, a_i]}$  линейно для любого  $i = 1, \dots, n$  и
- (2) образы отрезков  $[a_{i-1}, a_i]$  либо не пересекаются, либо совпадают.

Будем считать все встречающиеся пути симплициальными (с разными  $n$ ).

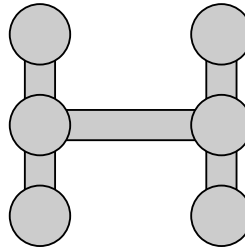


Рис. 3.2.3: Полянки и тропинки

Для симплициального пути  $\varphi$  существует окрестность  $O\varphi(I)$  графа  $\varphi(I)$ , представленная естественным образом в виде объединения ‘полянок’ (т.е. дисков, окружающих точки  $\varphi(a_i)$ ) и ‘тропинок’ (т.е. ‘ленточек’, соединяющих полянки вдоль ребер графа  $\varphi(I)$ ). См. рис. 3.2.3 для пути на рис. 3.1.3.b. (Это *утолщение* графа  $\varphi(I)$ , определенное в [Sk20, п. 1.5 «Планарность утолщений»].)

Переформулировка свойства аппроксимируемости вложениями на язык полянок и тропинок проводится аналогично переформулировке задачи 3.1.2.a.

Назовем путь  $f : I \rightarrow O\varphi(G)$  *незатейливым*, если на тропинках нет его самопересечений.

*Набросок решения задачи 3.1.4.b.* Мы обобщаем первое решение задачи 3.1.2.a. Мы используем переформулировку свойства аппроксимируемости вложениями на языке полянок и тропинок (рис. 3.2.3). Выберем произвольный незатейливый путь  $f$ . Поставим на левой средней полянке ноль, если точки входа пути на полянку и его выхода с полянки располагаются как на рис. 3.2.1.a, и единицу в противном случае (рис. 3.2.1.b). По правой полянке путь проходит три раза. Рассмотрим только первое и последнее прохождение пути по правой полянке и поставим на ней ноль или единицу по тому же правилу. Обозначим через  $v(f)$  сумму по модулю 2 этих двух чисел. Для пути  $f$  на рис. 3.1.3.b  $v(f) = 1$ . Далее доказательство дословно повторяет первое решение задачи 3.1.2.a.

### 3.3 Препятствие Ван Кампена

**Теорема аппроксимируемости.** *Симплициальный путь  $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ , не отображающий ни один отрезок в точку, аппроксимируем вложениями тогда и только тогда, когда расстановка пересечений когомологична нулевой (или, эквивалентно, когда препятствие Ван Кампена  $v(\varphi) \in \mathbb{Z}_2^{c(\varphi)}$  нулевое).*

В оставшейся части этого пункта мы приводим определение числа  $c(\varphi)$  и вектора  $v(\varphi)$ . Необходимость в теореме аппроксимируемости следует из утверждения 3.3.3.a.

Доказательство достаточности мы не приводим. Оно было получено слушателем лекций, по материалам которых написан этот параграф [Sk03’].

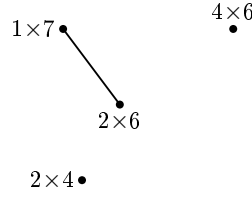


Рис. 3.3.1: Сингулярный граф  $\Delta$

*Определение сингулярного графа  $\Delta$ .* Выберем точки  $0 = a_0 < a_1 < \dots < a_n = 1$  как в определении симплицальности (§3.2). Вершины графа  $\Delta$  — такие пары

$$i \times j, \quad \text{что} \quad \varphi(a_i) = \varphi(a_j) \quad \text{и} \quad i < j.$$

Ребра графа  $\Delta$  соединяют вершины  $i \times j$  и  $(i \pm 1) \times (j \pm 1)$  этого графа, если такие вершины есть. Здесь знаки  $\pm$  выбираются независимо.

Например, см. рис. 3.3.1 для пути на рис. 3.1.3.b: вершины графа —  $1 \times 7, 2 \times 6, 2 \times 4$  и  $4 \times 6$ ; ребром соединены только первые две.

**Задача 3.3.1.** Граф  $\Delta$  зависит не только от  $\varphi$ , но и от выбора точек  $a_0, a_1, \dots, a_n$ .

*Определение числа  $c(\varphi)$ .* Обозначим через  $c(\varphi)$  количество компонент связности графа  $\Delta$ , не содержащих вершин  $i \times (i - 2), i \times 0$  и  $n \times i$ .

Например, для пути  $\varphi$  на рис. 3.1.3.b имеем  $c(\varphi) = 1$ .

**Задача 3.3.2.** Число  $c(\varphi)$  зависит только от  $\varphi$ , но не от выбора точек  $a_0, a_1, \dots, a_n$ .

*Определение расстановки  $\nu(f)$ .* Выберем точки  $0 = a_0 < a_1 < \dots < a_n = 1$  как в определении симплицальности (§3.2). Мы используем переформулировку свойства аппроксимируемости вложениями на языке полянок и тропинок (рис. 3.2.3). Возьмем произвольный незатейливый путь  $f$ . Рассмотрим вершину  $i \times j$  графа  $\Delta$  и полянку, содержащую  $\varphi(a_i) = \varphi(a_j)$ . (Заметим, что к полянке может примыкать более двух тропинок.) Поставим в вершину  $i \times j$  единицу, если точки пересечения образов  $f[a_{i-1}a_{i+1}]$  и  $f[a_{j-1}a_{j+1}]$  с граничной окружностью этой полянки *чередуются* на этой окружности (рис. 3.2.1.b,c) и ноль в противном случае (рис. 3.2.1.a). Полученную расстановку обозначим через  $\nu(f)$ .

Например, для путей  $\varphi$  и  $f$  на рис. 3.1.3.b имеем  $\nu(f) = (0, 1)$ .

**Задача 3.3.3.** (a) Если путь  $f$  несамопересекающийся, то расстановка  $\nu(f)$  нулевая.

(b) Обратное неверно.

(c) Расстановка  $\nu(f)$  нулевая тогда и только тогда, когда путь  $f$  можно так изменить на полянках, не меняя на тропинках, чтобы он стал несамопересекающимся.

(d) Расстановка  $\nu(f)$  зависит не только от  $\varphi$ , но и от  $f$  и от выбора точек  $a_0, a_1, \dots, a_n$ .

*Определение препятствия Ван Кампена  $v(\varphi) \in \mathbb{Z}_2^{c(\varphi)}$ .* Для каждой из  $c(\varphi)$  рассмотренных компонент связности графа  $\Delta$  вычислим сумму  $\text{mod } 2$  чисел расстановки  $\nu(f)$  в вершинах этой компоненты. Полученный набор  $v(\varphi) = v(\varphi, f) \in \mathbb{Z}_2^{c(\varphi)}$  назовем *препятствием Ван Кампена (с коэффициентами в  $\mathbb{Z}_2$ ) к аппроксимируемости пути  $\varphi$  вложениями*.

Например, для путей  $\varphi$  и  $f$  на рис. 3.1.3.b имеем  $v(\varphi, f) = (1)$ .

*Доказательство независимости  $v(\varphi, f)$  от  $f$  при фиксированных точках  $a_0, a_1, \dots, a_n$ .* Ясно, что расстановка  $\nu(f)$  зависит только от расположения отрезков пути  $f$  на тропинках. Рассмотрим преобразование такого расположения на произвольной одной тропинке для двух отрезков  $[a_{i-1}a_i]$  и  $[a_{j-1}a_j]$ , образы которых пересекают эту тропинку.

От любого  $f$  (т.е. расположения отрезков пути на тропинках) можно перейти к любому другому  $f'$  такими преобразованиями. Поэтому независимость  $v(\varphi, f)$  от  $f$  вытекает из следующей задачи. QED

**Задача 3.3.4.** Вектор  $v(\varphi, f)$  не изменяется при таких преобразованиях, если

(а)  $i \neq j - 1$  и  $i \neq 1$  и  $j \neq n$ .      (б)  $i = j - 1$  или  $i = 0$  или  $j = n$ .

(Указание к п. (а). Числа в вершинах  $i \times j$  и  $(i-1) \times (j-1)$  (или  $i \times (j-1)$  и  $(i-1) \times j$ ) графа  $\Delta$  изменятся на 1, а числа в остальных вершинах не изменятся.)

**Задача 3.3.5.** (а)  $v(\varphi, f)$  не зависит от выбора точек  $a_0, a_1, \dots, a_n$ .

(с) Если  $v(\varphi) = 0$ , то существует такое отображение  $f : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  общего положения, близкое к  $\varphi$ , что  $f[a_{i-1}, a_i] \cap f[a_{j-1}, a_j] = \emptyset$  для любой пары  $i \times j$  ребер отрезка  $I$ , для которой вершина  $i \times j$  графа  $\Delta$  не содержится в компоненте связности с вершинами  $i \times (i-2)$ ,  $i \times 0$  и  $n \times i$  (такое отображение  $f$  не обязано быть вложением).

**Задача 3.3.6.** (а) Постройте аналогично препятствие Ван Кампена к аппроксимируемости вложениями симплициального цикла  $\varphi : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$ .

(б) Докажите, что оно неполно.

(с) Докажите, что оно неполно даже для отображения, образом которого являются триоды.

(д) Постройте аналогично препятствие Ван Кампена к аппроксимируемости вложениями симплициального отображения  $\varphi : I_1 \sqcup I_2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  (ср. с концом §3.1).

(е) Полно ли оно?

*Целочисленное препятствие Ван Кампена*  $V(\varphi) \in \mathbb{Z}^{c(\varphi)}$  строится аналогично. Необходимы лишь следующие изменения. Нужно выбрать ориентацию в  $\mathbb{R}^2$ . При построении расстановки  $\nu(\varphi)$  в вершину  $i \times j$  ставится единица, если точки входа пути  $f$  на эту полянку и точки его выхода с этой полянки располагаются, как на рис. 3.2.1.b, и минус единица, если они располагаются как на рис. 3.2.1.c. Полученная расстановка обозначается  $N(\varphi)$ . Для каждой из  $c(\varphi)$  рассмотренных компонент связности графа  $\Delta$  вычислим сумму чисел в вершинах этой компоненты. Полученный набор  $V(\varphi) = V(\varphi, f) \in \mathbb{Z}^{c(\varphi)}$  называется *препятствием Ван Кампена (с коэффициентами  $\mathbb{Z}$ )* к аппроксимируемости пути  $\varphi$  вложениями.

**Задача 3.3.7.** (а,b,c,d) Решите аналоги задач 3.3.6 для целых коэффициентов.

## 3.4 Другое построение препятствия Ван Кампена \*

Это построение обобщает *второе* решение задачи 3.1.2.a. Оно сложнее предыдущего, но именно оно обобщено в п. 1.5 до препятствия Ван Кампена к вложимости графов в плоскость (и в п. 6.8, 6.9 —  $k$ -мерных комплексов в 2-мерное пространство). Впрочем, формально п. 1.5, 6.8 и 6.9 независимы от настоящего пункта.

Пусть  $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  — ломаная (т.е. симплициальный путь) общего положения на плоскости. Выберем точки  $0 = a_0 < a_1 < \dots < a_n = 1$  как в определении симплициальности. Обозначим отрезок  $[a_{i-1}, a_i]$  числом  $i$ .

Обозначим через  $I^*$  верхнюю «наддиагональ» таблицы  $n \times n$ , т.е. объединение клеток  $i \times j$  с  $i < j - 1$  (отвечающих парам несоседних ребер графа  $I$ ), рис. 3.4.1. Будем обозначать такую клетку  $\{i, j\}$ , где  $|i - j| > 1$ , но не обязательно  $i < j - 1$ .

Для любого пути  $f : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  общего положения, достаточно близкого к  $\varphi$ , и любых двух несоседних ребер  $i, j$  пересечение  $fi \cap fj$  состоит из конечного числа точек. Поставим в клетке  $\{i, j\} \in I^*$  число  $|fi \cap fj| \bmod 2$ . Полученную расстановку назовем **расстановкой (или коциклом) пересечений** и обозначим через  $\nu(f)$ . Если путь  $f$  несамопересекающийся, то  $\nu(f) = 0$ .

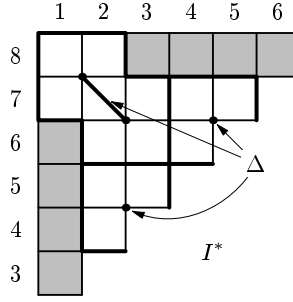


Рис. 3.4.1: Верхняя наддиагональ  $I^*$

Покрасим в черный цвет все те клетки  $\{i, j\}$  таблицы  $I^*$ , для которых  $\varphi_i \cap \varphi_j = \emptyset$ . Так как путь  $f$  близок к  $\varphi$ , то  $\nu(f) = 0$  в черных клетках.

**Задача 3.4.1** (ср. [АВМ+, лемма 2.6]). (а) В каждой точке  $(x, y)$  на ребре таблицы  $I^*$  поставим вектор с направлением от  $f(x)$  к  $f(y)$ . Тогда в каждой клетке таблицы  $I^*$  стоит четность числа оборотов вектора при обходе по ее границе.

(б) Если симплициальный путь  $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  не отображающий ни один отрезок в точку, аппроксимируем вложениями, то

(R) для любого непрерывного движения точек  $x$  и  $y$  по отрезку  $I$ , в процессе которого  $\varphi(x) \neq \varphi(y)$ , а в конце которого точки  $x$  и  $y$  возвращаются каждая в свое исходное положение (т.е. для любого непрерывного отображения  $S^1 \rightarrow \{(x, y) \in I \times I \mid \varphi(x) \neq \varphi(y)\}$ ), число оборотов вектора  $\varphi(x) - \varphi(y)$  в процессе этого движения равно нулю.

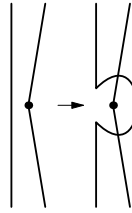


Рис. 3.4.2: Преобразование Райдемайстера для путей в плоскости

При преобразовании Райдемайстера пути  $f$ , изображенном на рис. 3.4.2, расстановка  $\nu(f)$  изменяется ровно в двух соседних клетках  $\{i, j\}$  и  $\{i, j-1\}$ . Если одна из этих двух клеток не лежит в  $I^*$ , то число в ней не стоит и не меняется. Расстановка единиц в двух клетках таблицы  $I^*$ , соседних с ребром  $\{i, a_j\}$  таблицы, и нуля в остальных клетках таблицы называется **элементарной кограницей** ребра  $\{i, a_j\}$  и обозначается  $\delta\{i, a_j\}$ .

Покрасим в белый цвет те ребра  $\{i, a_j\}$  таблицы  $I^*$ , для которых  $\varphi_{a_j} \in \varphi_i$ . Так как  $f$  близко к  $\varphi$ , то указанное преобразование Райдемайстера возможно лишь для белого ребра.

**Задача 3.4.2.** Для пути  $f$  обозначим через  $f_{e_1, \dots, e_k}$  путь, полученный указанными преобразованиями Райдемайстера для ребер  $e_1, \dots, e_k$  таблицы  $I^*$ . Тогда  $\nu(f) - \nu(f_{e_1, \dots, e_k}) = \delta e_1 + \dots + \delta e_k$ .

Обозначим через  $X$  множество всех расстановок нулей и единиц в клетках таблицы с нулями в черных клетках. Назовем расстановки  $\nu_1, \nu_2 \in X$  **когомологичными**, если  $\nu_1 - \nu_2 = \delta e_1 + \dots + \delta e_k$  для некоторых белых ребер  $e_1, \dots, e_k$ .

**Лемма 3.4.3.** (Ср. с леммой 1.5.6.) Расстановки пересечений разных симплициальных путей общего положения, достаточно близких к одному симплициальному пути, когомологичны.

*Доказательство кохомологичности расстановок пересечений для путей  $f, f' : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  общего положения, близких к  $\varphi$  и отличающихся только на внутренности одного ребра  $j$ .* Для каждой вершины  $a_i$  проведем некоторый путь, соединяющий эту вершину с бесконечностью, и находящийся в общем положении относительно цикла  $f(j) \cup f'(j)$ . Обозначим через  $b_1, \dots, b_k$  все те вершины, проведенные пути которых пересекают цикл  $f(j) \cup f'(j)$  в нечетном числе точек (набор этих вершин не зависит от выбора путей). Тогда

$$\nu(f) - \nu(f') = \delta\{b_1, j\} + \dots + \delta\{b_k, j\}.$$

*Набросок доказательства леммы 3.4.3.* Возьмем произвольную гомотопию  $f_t : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $t \in [0, 1]$ , общего положения, близкую к  $\varphi$ , между заданными путями  $f_0, f_1 : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  общего положения. На каждом ребре  $\{i, a_j\}$  таблицы  $I^*$  поставим четность количества моментов времени  $t$ , для которых  $f_t(a_i) \in f_t(j)$ . Это количество конечно по соображениям общего положения. Обозначим через  $e_1, \dots, e_k$  все ребра, на которых поставлена единица. Так как  $f_t(x)$  близко к  $\varphi(x)$ , то из  $\varphi a_i \notin \varphi j$  вытекает  $f_t(a_i) \notin f_t(j)$ . Поэтому все ребра  $e_1, \dots, e_k$  белые. Можно проверить, что

$$\nu(f_0) - \nu(f_1) = \delta e_1 + \dots + \delta e_k.$$

Эту идею проще всего формализовать, заменив непрерывное движение на дискретную последовательность преобразований, как в доказательстве леммы 1.5.6.

**Задача 3.4.4.** (а) Покрасим в черный цвет все ребра, отличные от белых. Тогда граница черной клетки состоит из черных ребер, но могут быть и другие черные ребра. Группа  $H_\varphi^2(I^*) = X / \sim$  расстановок с точностью до кохомологичности называется *двумерной группой кохомологий (с коэффициентами в  $\mathbb{Z}_2$ ) пространства  $I^*$  относительно его черного подпространства*. (Стандартное обозначение:  $H^2(I^*, I^{*\varphi})$ , где  $I^{*\varphi}$  — объединение черных клеток и ребер.)

Тогда  $H_\varphi^2(I^*) \cong \mathbb{Z}_2^k$ , где  $k$  — число кусков таблицы  $I^*$ , ограниченных черными ребрами (т.е. в границе которых только черные ребра) и содержащих хотя бы одну белую клетку.

*Препятствие Ван Кампена (с коэффициентами в  $\mathbb{Z}_2$ )* определяется как  $v(\varphi) = [\nu(f)] \in H_\varphi^2(I^*)$ . Так как  $v(f) = 0$  для вложения  $f$ , то  $v(\varphi)$  является препятствием к аппроксимируемости пути  $\varphi$  вложениями.

(б) Имеем  $k = c(\varphi)$ , см. п. 3.3. Существует естественный изоморфизм (Пуанкаре)  $\mathbb{Z}_2^{c(\varphi)} \cong H^2(I_\varphi^*)$ . Два построенных препятствия Ван Кампена переходят друг в друга при этом изоморфизме.

(с) Рассмотрим более слабую форму (г) условия (R) из предложения 3.4.1.b: *число оборотов четно*. Тогда  $(r) \Leftrightarrow (v(\varphi) = 0)$ . Условие  $v(\varphi) = 0$  сложнее формулируется, но гораздо проще проверяется, чем (г).

(д) Постройте аналогично препятствие для аппроксимируемости вложениями замкнутых ломаных (т.е. симплициальных циклов).

*Препятствие Ван Кампена  $V(\varphi)$  с целыми коэффициентами* строится так. Выберем ориентацию в  $\mathbb{R}^2$  и на  $I$ . Для любого отображения  $f : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  общего положения, достаточно близкого к  $\varphi$ , и любых двух несоседних ребер  $i, j$ , пересечение  $fi \cap fj$  состоит из конечного числа точек. Поставим в клетке  $i \times j$  *индекс пересечения*  $fi \cdot fj = \sum \{\text{sign } P \mid P \in fi \cap fj\}$ , где  $\text{sign } P = +1$ , если векторы ориентаций  $fi$  и  $fj$  (в этом порядке) составляют базис ориентации плоскости  $\mathbb{R}^2$ , и  $\text{sign } P = -1$  в противном случае. Обозначим полученную расстановку через  $N(f)$ . Обозначим через  $X$  множество всех расстановок целых чисел в клетках таблицы с нулями в черных клетках. Определим кохомологичность аналогично и положим  $V(\varphi) = [N(f)] \in H_\varphi^2(I^*; \mathbb{Z}) := X / \sim$ .

Нетрудно показать, что  $V(\varphi)$  зависит от выбора ориентаций в  $\mathbb{R}^2$  и на  $I$  лишь с точностью до автоморфизма группы  $H_\varphi^2(I^*; \mathbb{Z})$ .

**Задача 3.4.5.** (а)  $H_\varphi^2(I^*; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^k$ . (б)  $(R) \Leftrightarrow (V(\varphi) = 0)$ .

Препятствие Ван Кампена является частным случаем препятствий из §9 «Гомотопическая классификация отображений». Действительно, таблицу  $I^*$  можно рассматривать как двумерный полиэдр, а клетки  $i \times j$  как его двумерные клетки.

### 3.5 Препятствие Ван Кампена к распроектируемости

Отображение  $\varphi : G \rightarrow \mathbb{R}$  конечного графа  $G$  в прямую называется *распроектируемым*, если существует такое вложение  $f : G \rightarrow \mathbb{R}^2$ , что  $\varphi = \pi \circ f$ , где  $\pi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  — ортогональная проекция.

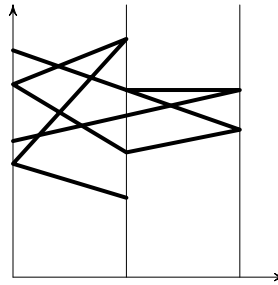


Рис. 3.5.1: Пример расположения

Приведем еще более элементарную переформулировку этого определения для кусочно-линейных отображений  $\varphi$  общего положения (рис. 3.5.1). (Общность положения означает здесь, что никакой отрезок не переходит в точку.) Для этого фиксируем декартову систему координат на плоскости. Назовем *расположением* такое изображение (с самопересечениями) графа  $G$  на плоскости, для которого

- (1) абсциссы вершин целые,
- (2) если две вершины соединены ребром в нашем графе, то их абсциссы отличаются ровно на 1, и это ребро является отрезком.

Расположение называется *вложением*, если внутренности образов любых двух его ребер не пересекаются. Расположение называется *распроектируемым*, если возможно преобразовать его во вложение путем одновременной перестановки вершин, не изменяющей их абсцисс, и соответствующего изменения ребер.

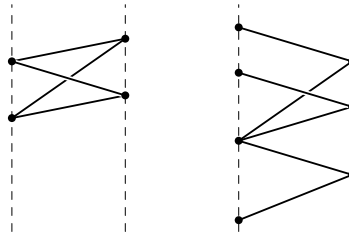


Рис. 3.5.2: Простейшие нераспроектируемые расположения

**Задача 3.5.1.** (а) Любое отображение отрезка в отрезок является распроектируемым.

(б) Расположения на рис. 3.5.2 не являются распроектируемыми.

(с) (Гипотеза) Расположение графа в плоскости, абсциссы вершин которого равны 0 или 1, является распроектируемым тогда и только тогда, когда оно не содержит расположения окружности с четным числом вершин, абсциссы которых равны поочередно нулю или единице (рис. 3.5.2 слева) или расположения триода на рис. 3.5.2 справа.

(d) Расположения букв  $H$  и  $X$  с [ARS02, Fig. 2] (даже близкие к ним) не являются распроектируемыми.

*Указание.* Если не получается, то см. ниже.

В этом пункте исследуется следующая проблема: *какие симплициальные отображения общего положения являются распроектируемыми?* Понятие распроектируемости (спроектированного вложения) возникло в [Sz91], [Ak00] и изучалось в [ARS02] в связи с проблемой аппроксимации вложениями отображений графов в плоскость, см. также ссылки в [Sk16']. По поводу алгоритмической разрешимости проблемы распроектируемости и невозможности критерия типа Куратовского можно сделать замечания, аналогичные приведенным выше по проблеме аппроксимируемости вложениями.

**Теорема распроектируемости.** *Если отображение  $\varphi : G \rightarrow \mathbb{R}$  распроектируемо, то пара точек не может непрерывно двигаться по графу  $G$  так, чтобы в процессе движения их  $\varphi$ -образы совпадали, а сами точки не совпадали, и в результате движения точки поменялись бы местами.*

*Для симплициального отображения  $\varphi : G \rightarrow \mathbb{R}$  общего положения это необходимое условие (Ван Кампена) является достаточным, если из каждой вершины графа  $G$  выходит не менее трех ребер.*

**Задача 3.5.2.** (а) Докажите необходимость в теореме распроектируемости.

(б) Докажите необходимость аналогичного условия Ван Кампена для распроектируемости расположений, полученного из сформулированного выше заменой ' $\varphi$ -образов' на 'абсциссы'.

Например, следующие последовательности пар показывают, что расположения с [ARS02, Fig. 2] не являются распроектируемыми (это решает задачу 3.5.1.d):

$$aa_1, ee_1, d_1d_2, b_2b_1, c_2c_1, e_2e, b_2b, d_1d, c_1c, a_1a;$$

$$aa_1, dd_3, cc_1, ff_1, d_1d_2, e_2e_1, c_2c_1, d_4d_3, b_2b_1, d_5d_3, f_2f, b_2b, e_2e, d_3d, a_1a.$$

В [ARS02] для симплициальных отображений общего положения доказано, что необходимое условие Ван Кампена действительно равносильно некоторому алгебраическому условию, более похожему на вышеописанные препятствия Ван Кампена. Из этого, в частности, вытекает, что условие Ван Кампена легко проверять алгоритмически (см. прямое доказательство ниже). В [ARS02] выдвинута также гипотеза о достаточности. Достаточность в теореме распроектируемости вытекает из [ARS02], [Sk03']. Заметим, что такое доказательство очень не прямое. Прямое доказательство при другом дополнительном ограничении см. в [GS79].

Приведем переформулировку необходимого условия Ван Кампена. Из переформулировки будет ясно, что его легко проверить алгоритмически [ARS02]. Упорядоченную пару  $(A, B)$  двух таких различных вершин графа  $G$ , что  $\varphi(A) = \varphi(B)$ , будем называть просто *парой* и обозначать  $AB$ . Пара  $A_1B_1$  называется *элементарно достижимой* из пары  $AB$ , если граф  $G$  содержит ребра  $AA_1$  и  $BB_1$ . Пара  $ST$  называется *достижимой* из пары  $AB$ , если  $ST$  может быть получена из  $AB$  последовательностью элементарно достижимых пар. Обозначение:  $ST \sim AB$ . Очевидно, достижимость — отношение эквивалентности. Необходимое условие Ван Кампена равносильно следующему (для расположений): *никакая пара  $AB$  не достижима из пары  $BA$* . Приведенная гипотеза принимает следующую форму: *расположение, для которого никакая пара  $AB$  не достижима из пары  $BA$ , является распроектируемым*.



## 4 Зацепленность в трехмерном пространстве

### 4.1 Зацепленность треугольников

В этом пункте  $\Delta$  и  $\Delta'$  — невырожденные треугольники (в пространстве), контуры которых не пересекаются.

Пусть сначала никакие четыре из вершин двух треугольников не лежат в одной плоскости. Треугольники называются **зацепленными**, если контур первого пересекает второй ровно в одной точке (рис. 4.1.1).

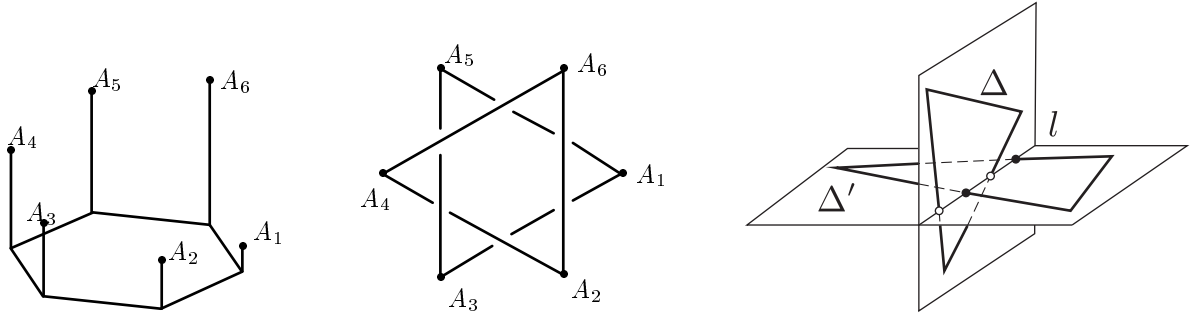


Рис. 4.1.1: Зацепленные треугольники

В общем случае треугольники  $\Delta$  и  $\Delta'$  называются **зацепленными**, если выполнено любое из следующих равносильных условий.

**Задача 4.1.1.** Следующие условия равносильны.

- (1) Каждый из треугольников пересекает контур другого.
- (2) Пересечение треугольников есть отрезок, концы которого лежат на контурах разных треугольников.
- (3) Пересечение  $\partial\Delta \cap \Delta'$  есть одна точка, и два отрезка контура  $\partial\Delta$ , выходящие из этой точки, находятся по разные стороны от плоскости треугольника  $\Delta'$ .
- (3') То же, что в (3), с переменной местами  $\Delta$  и  $\Delta'$ .
- (4) Плоскость треугольника  $\Delta'$  пересекает контур  $\partial\Delta$  в двух точках, лежащих по разные стороны от контура  $\partial\Delta'$  (такая пара точек называется *зацепленной с  $\partial\Delta'$* ).
- (4') То же, что в (4), с переменной местами  $\Delta$  и  $\Delta'$ .
- (5) Плоскости треугольников пересекаются по прямой, пересечение которой с контуром каждого из треугольников есть пара точек, причем эти пары точек чередуются вдоль прямой (такие пары точек называются *зацепленными на прямой*; рис. 4.1.1).

*Указание.* При каждом из этих условий пересечение  $\Delta \cap \Delta'$  является либо пустым, либо одной точкой, либо отрезком (но не треугольником).

**Утверждение 4.1.2** (о центральной проекции). *Если никакие четыре из точек  $A, B, C, D, E, F, O$  не лежат в одной плоскости, то следующие условия равносильны.*

- (1) Треугольники  $ABC$  и  $DEF$  зацеплены.
- (2) Отрезок  $BC$  проходит ниже ровно одной из сторон треугольника  $DEF$  при взгляде из точки  $A$  (т.е. существует единственная пара  $(P, x)$ , состоящая из точки  $P \in BC$  и стороны  $x$  треугольника  $DEF$ , такая что отрезок  $AP$  пересекает сторону  $x$ ).
- (3) Контур треугольника  $ABC$  проходит ниже контура треугольника  $DEF$  нечетное число раз при взгляде из точки  $O$ .

Для доказательства равносильности (1)  $\Leftrightarrow$  (3) потребуется лемма о четности 4.2.5, а для доказательства утверждения 4.1.2' — ее аналог.

**Утверждение 4.1.2'** (о проекции). Пусть никакие четыре из точек  $A, B, C, D, E, F$  не лежат в одной плоскости, а также никакие три из их проекций на плоскость  $Oxy$  не лежат на одной прямой. Тогда треугольники  $ABC$  и  $DEF$  зацеплены тогда и только тогда, когда контур треугольника  $ABC$  проходит ниже контура треугольника  $DEF$  нечетное число раз (т.е. количество точек пересечений проекций контура треугольника  $ABC$  и проекций контура треугольника  $DEF$  на плоскость  $Oxy$ , в которых  $z$ -координата соответствующей точки контура треугольника  $ABC$  меньше таковой для  $DEF$ , нечетно).

**Задача 4.1.3.** Существуют ли 100 попарно зацепленных треугольников?

**Задача 4.1.4.** В пространстве имеется 13 точек: 3 красных и 10 желтых. Никакие четыре из них не лежат в одной плоскости. Тогда количество желтых треугольников, зацепленных с красным треугольником, четно. Красным (желтым) треугольником называется любой треугольник с красными (желтыми) вершинами. Треугольники, отличающиеся перестановкой вершин, считаются одинаковыми.

**Задача 4.1.5.** Для любых 6 точек  $0, 1, 2, 3, 4, 5$

(а) если любые два объекта из треугольников  $0jk, 1 \leq j < k \leq 5, k \neq 2$ , и отрезка 12 не имеют общих внутренних точек, то контур треугольника 012 пересекает треугольник 345; более того, треугольники 012 и 345 зацеплены;

(б) если любые два объекта из треугольников  $0jk, 1 \leq j < k \leq 5, (j, k) \notin \{(1, 2), (1, 3)\}$ , и отрезков 12, 13 не имеют общих внутренних точек, то зацеплены либо треугольники 012 и 345, либо треугольники 013 и 245;

(в) если любые два объекта из треугольников  $0jk, 1 \leq j < k \leq 5, (j, k) \notin \{(1, 2), (1, 3), (1, 4)\}$ , и отрезков 12, 13, 14 не имеют общих внутренних точек, то зацеплены либо треугольники 012 и 345, либо треугольники 013 и 245, либо треугольники 014 и 235.

(д) Попробуйте угадать утверждение!

Утверждения 4.1.5.abc следуют из количественной линейной теоремы Конвея-Гордона-Закса [Sk14, теорема 1.2'], ср. теорему 4.2.9.a. Утверждения 1.7.1, 1.7.2, 4.1.5 и 5.2.4 иллюстрируют некоторые идеи доказательства теоремы об NP-трудности 6.6.3.

**Задача 4.1.6.** There are six points 1, 2, 3, 4, 5, 6 in the 3-space such that

- no three of them lie in the same line,
- the outline of the triangle 123 intersects the triangle 456 at exactly one point, and
- the outline of the triangle  $\sigma$  intersects the triangle  $\tau$  at an even number of points, for any other unordered pair  $\{\sigma, \tau\}$  of triangles having disjoint vertices.

By a triangle  $ijk$  we mean the part of the plane passing through points  $i, j, k$ , that is bounded by the union of segments  $ij, jk, ki$ .

(Recall that triangles such as 123 and 456 are called *linked*.)

*Подсказка к части задачи 4.1.1.* Обозначим через  $l$  прямую из (5).

*Доказательство импликации (3)&(3')  $\Rightarrow$  (5).* Ввиду (3),  $\Delta$  пересекает плоскость треугольника  $\Delta'$ , поэтому  $\Delta \cap l \neq \emptyset$ . Пересечение  $\Delta \cap l$  содержит только две точки, назовем их  $A, B$ . Аналогично, ввиду (3'), пересечение  $\Delta' \cap l$  содержит только две точки, назовем их  $A', B'$ . Пересечение  $\Delta' \cap \partial\Delta$  содержится в отрезке  $A'B'$ . Значит, ровно одна из точек  $A$  и  $B$  лежит на отрезке  $A'B'$ . Поэтому пары  $A, B$  и  $A', B'$  зацеплены в  $l$ .  $\square$

*Доказательство импликации (4)&(5)  $\Rightarrow$  (3).* Предположим, что пары  $\{A, B\} = \Delta \cap l$  и  $\{A', B'\} = \Delta' \cap l$  зацеплены в  $l$ . Тогда (3) следует из (4).  $\square$

*Доказательство равносильности (1)  $\Leftrightarrow$  (2) в утверждении 4.1.2.* Когда  $P$  пробегает отрезок  $BC$ , отрезок  $AP$  замечает треугольник  $ABC$ . Поэтому количество сторон треугольника  $DEF$ , ниже которых отрезок  $BC$ , равно количеству точек пересечения контура треугольника  $DEF$  с треугольником  $OBC$ .

*Подсказка к 4.1.3.* Ответ: да.

Решение. (Придуманно Е. Коганом, предварительная версия написана Р. Карасевым.) Возьмем правильный треугольник  $T$ . Обозначим через  $AB$  одну из его высот, а через  $R^\varepsilon = R_{AB}^{\varepsilon, \varepsilon}$  преобразование пространства, являющееся композицией переноса на вектор  $\varepsilon \overrightarrow{AB}$  и вращения вокруг  $\overrightarrow{AB}$  на угол  $\varepsilon$  (винтовое движение). При достаточно малом  $\varepsilon$  треугольники  $T$  и  $R^\varepsilon(T)$  зацеплены, так как пересечение их плоскостей содержит высоты каждого из них и в этом пересечении контур одного из них проходит через выпуклую оболочку другого. Поэтому треугольники

$$R^{m\varepsilon/100}(T) \quad \text{и} \quad R^{n\varepsilon/100}(T) = R^{(n-m)\varepsilon/100}(R^{m\varepsilon/100}(T))$$

зацеплены при любых  $0 \leq m < n < 100$ .

*Отредактированное решение Ю. Семенова.* Покажем, как строить пример по индукции. Пусть у нас есть несколько попарно зацепленных треугольников и контур одного из них находится на расстоянии не менее  $\varepsilon$  от контуров всех других. Тогда этот треугольник  $T$  можно пошевелить менее чем на  $\varepsilon$  и получить треугольник  $T'$ , зацепленный с  $T$  (например, работает конструкция из предыдущего решения для двух треугольников). Так как при шевелении контур двигался менее чем на  $\varepsilon$ , то контур движущегося треугольника не пересекал контуры других треугольников. Следовательно,  $T'$  зацеплен с каждым из остальных треугольников, как и  $T$  (см. утверждение 4.4.1.b и замечание 4.4.6).

*Подсказка к 4.1.4.* Четность этого количества равна сумме количеств точек пересечения (выпуклых оболочек) желтых треугольников с контуром красного. Эта сумма четна, поскольку объединение желтых треугольников разлагается в сумму по модулю 2 поверхностей некоторых тетраэдров. Ср. утверждение 4.8.5.a и лемму о четности 4.8.2.

*Решение И. Богданова.* Рассмотрим полный двудольный граф на множестве желтых точек: одна доля — точки с одной стороны от плоскости красного треугольника, другая — с другой. Покрасим ребро в красный, если оно пересекает красный треугольник, и в черный иначе. Тогда количество треугольников, зацепленных с красным, — это количество пар разноцветных ребер с общим концом (назовем их галками).

Если обе доли нечетны, то количество галок с центром в любой вершине четно.

Если обе доли четны, то количество галок с центром в данной вершине нечетно тогда и только тогда, когда ее (красная) степень нечетна. Поскольку количество таких вершин четно, то и общее количество галок тоже четно.

## 4.2 Зацепленность по модулю 2 замкнутых ломаных

**Узлом** называется замкнутая самопересекающаяся ломаная. **Зацеплением** называется набор попарно непересекающихся узлов, которые называются *компонентами* зацепления (рис. 4.2.1). Такие упорядоченные наборы называются упорядоченными или раскрашенными зацеплениями, а такие неупорядоченные наборы называются неупорядоченными или нераскрашенными зацеплениями. В дальнейшем мы будем сокращать «упорядоченное зацепление» до «зацепление», поскольку будем рассматривать только упорядоченные зацепления.

В §§4.2,4.3 через  $a$  и  $b$  обозначены непересекающиеся узлы.

Говоря неформально, двухкомпонентное зацепление *зацеплено по модулю 2*, если поверхность «общего положения» («случайная»), натянутая на первую компоненту, пересекает вторую компоненту в нечетном числе точек (см. подробнее замечание 4.2.8.a). Путь к удобной формализации этого понятия не так короток. Во-первых, поверхность удобно взять самопересекающейся, а тогда и просто «диском» (подробнее см. замечание

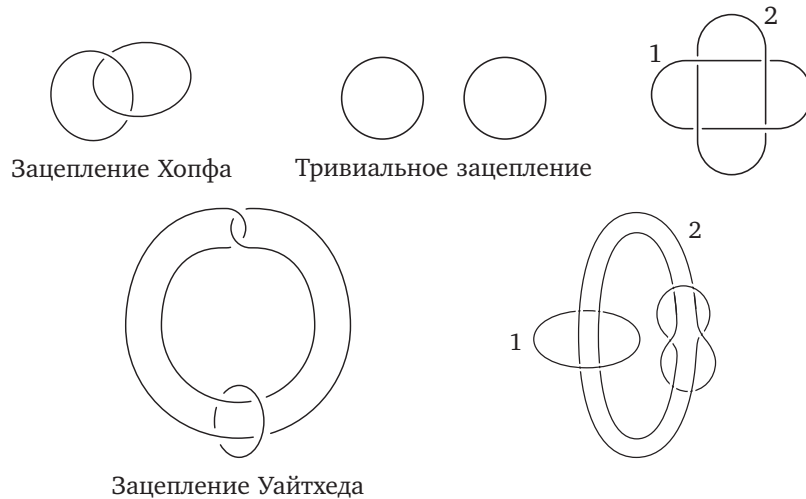


Рис. 4.2.1: Примеры зацеплений

4.2.8.b,d). Во-вторых, вместо этой поверхности (или диска) удобно рассматривать набор треугольников, т.е. вместо геометрического объекта — алгебраический. Последнее приводит к одной из основных идей теории гомологий (см. также более общее определение зацепленности по модулю 2 в §4.9).

Точка  $O$  находится в **общем положении** с зацеплением  $(a, b)$ , если  $O$  не лежит

- на одной прямой ни с какими двумя вершинами (одной или разных) ломаных, и
- в одной плоскости ни с какой из тех троек вершин (одной или разных) ломаных, которые не лежат на одной прямой.

Например, никакая вершина одной из ломаных не находится в общем положении с зацеплением.

**Задача 4.2.1.** Какие точки куба находятся в общем положении с границами противоположных граней куба?

**Лемма 4.2.2.** (a) Для любого двухкомпонентного зацепления есть точка, находящаяся с ним в общем положении.

(b) Если точка  $O$  находится в общем положении с  $(a, b)$ , то для каждого ребра  $MN$  узла  $a$

- отрезок  $OM$  не пересекается с  $b$ ;
- треугольник  $OMN$  не содержит вершин узла  $b$ ;
- пересечение  $OMN \cap b$  состоит из конечного числа точек.

*Подсказка.* Последнее свойство в п. (b) следует из того, что для каждого ребра  $MN$  узла  $a$  и для каждого ребра  $PQ$  узла  $b$  пересечение  $OMN \cap PQ$  либо пусто, либо является внутренней точкой как треугольника  $OMN$ , так и отрезка  $PQ$ .

Узлы  $a, b$  (или зацепление  $(a, b)$ ) называются **зацепленными по модулю 2**, если существует точка  $O$  в общем положении с  $(a, b)$ , для которой нечетна сумма

$$\sum_{MN} |OMN \cap b|,$$

где суммирование ведется по ребрам  $MN$  узла  $a$ . Это определение осмыслено ввиду лемм 4.2.2.ab. Ср. лемму 4.2.4.a.

**Задача 4.2.3.** Какие из зацеплений на рис. 4.2.1 и 4.2.2.bw зацеплены по модулю 2? (Возьмите любые зацепления с данными проекциями на ваш выбор; используйте без доказательства лемму 4.2.4.a; для рисунка 4.2.2.b рассмотрите двухкомпонентные подзацепления.)

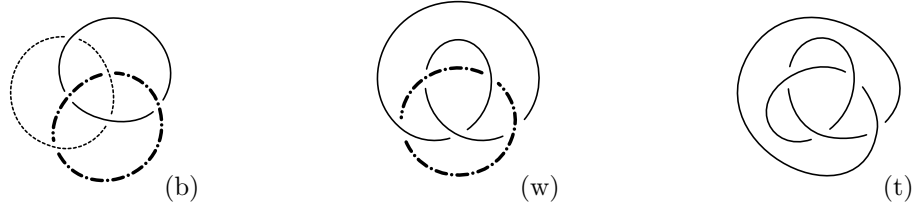


Рис. 4.2.2: Кольца Борромео, зацепление Уайтхеда и трилистник

Определение связной суммы зацеплений приведено, например, в [Sk20u, конец §7].

**Лемма 4.2.4.** (a) *Зацепление  $(a, b)$  является зацепленным по модулю 2 тогда и только тогда, когда сумма  $\sum_{MN} |OMN \cap b|$  нечетна для каждой точки  $O$  в общем положении с зацеплением.*

(b) *Два треугольника, имеющие непересекающиеся контуры, зацеплены (в смысле §4.1) тогда и только тогда, когда они зацеплены по модулю 2 (в смысле этого раздела).*

(c) *Зацепленность по модулю 2 является «аддитивной» по отношению к связной сумме двухкомпонентных зацеплений.*

*Подсказка.* В (a) используйте лемму 4.2.5.

Ясно, что если ломаная не пересекает контур треугольника и ни одна из вершин ломаной не лежит в треугольнике, то ломаная пересекает треугольник в конечном числе точек (ср. Proposition 1.3.1).

**Лемма 4.2.5** (о четности; ср. лемму о четности 1.3.3). (a) *Даны замкнутая несамопересекающаяся ломаная и тетраэдр. Ломаная не пересекает ребер тетраэдра, и ни одна из вершин ломаной не лежит ни на одной грани тетраэдра. Тогда ломаная пересекает поверхность тетраэдра в четном числе точек.*

(b) *То же, но тетраэдр может быть вырожденным (т.е. лежать в плоскости), и утверждается четность суммы  $\sum_{\alpha} |\alpha \cap b|$ , где суммирование идет по граням  $\alpha$  тетраэдра, а  $b$  — ломаная.*

*Указание к (a).* Тетраэдр разбивает пространство, далее аналогично лемме о четности 1.3.3.a.<sup>21</sup>

Обозначим через  $\partial XYZT$  поверхность тетраэдра  $XYZT$ .

*Набросок доказательства леммы 4.2.4.a.* Пусть пара  $\{O, O'\}$  точек находится в общем положении с зацеплением  $(a, b)$ . Эту общность положения нужно определить так, чтобы нижеприведенное доказательство прошло. Нужно потребовать, чтобы каждая из точек  $O, O'$  находилась в общем положении с  $(a, b)$ . Дополнительно нужно потребовать, например, чтобы  $O, O'$  и любые две вершины (одной или разных) ломаных не лежали в одной плоскости. Тогда

$$\sum_{MN} (|OMN \cap b| + |O'MN \cap b|) \equiv_2 \sum_{MN} |\partial OO'MN \cap b| \equiv_2 0.$$

<sup>21</sup>Alternatively, analogously to the Parity Lemma 1.3.3 for (a) it suffices to prove that *Если никакие четыре из семи вершин треугольника и тетраэдра не лежат на одной плоскости, то контур треугольника пересекается с поверхностью тетраэдра в четном числе точек.* Эта лемма о четности следует из того, что пересечение треугольника и поверхности тетраэдра является конечным объединением ломаных. Это объединение имеет четное число концов, которые и являются требуемыми точками пересечения. (Альтернативно, заметим, что плоскость треугольника пересекает поверхность тетраэдра по конечному числу ломаных, и используем лемму о четности 1.3.3.)

Здесь

- суммирование ведется по ребрам  $MN$  узла  $a$ ;
- второе сравнение следует из леммы 4.2.5.а.

Если каждая из двух точек  $O, O'$  находится в общем положении с  $(a, b)$ , то существует точка  $O''$ , для которой каждая из пар  $\{O, O''\}$  и  $\{O'', O'\}$  находится в общем положении с  $(a, b)$ .  $\square$

**Утверждение 4.2.6** (о симметричности). *Зацепленность по модулю 2 пары ломаных не зависит от порядка ломаных.*

*Набросок доказательства утверждения 4.2.6.* Используем сингулярные конусы (утверждение 4.2.6 также следует из утверждения о проекции 4.2.7). Как и в доказательстве леммы 4.2.4.а, достаточно рассмотреть случай, когда пара  $\{O, O'\}$  точек находится в общем положении с зацеплением  $(a, b)$ . Эту общность положения нужно определить так, чтобы нижеприведенное доказательство прошло; это определение не обязано совпадать с определением, данным в наброске доказательства леммы 4.2.4.а; но возьмем то же определение. Тогда

$$\begin{aligned} \sum_{MN} |OMN \cap b| &\stackrel{(1)}{=} \sum_{MN, PQ} |OMN \cap PQ| \stackrel{(2)}{=} \sum_{MN, PQ} |OMN \cap \partial O'PQ| \stackrel{(3)}{=} \\ &\stackrel{(3)}{=} \sum_{MN, PQ} |\partial OMN \cap O'PQ| \stackrel{(4)}{=} \sum_{PQ} |a \cap O'PQ|. \end{aligned}$$

Здесь суммирование ведется по всем ребрам  $MN$  узла  $a$  и ребрам  $PQ$  узла  $b$ ; сравнения по модулю 2. Сравнение (3) справедливо, поскольку

- либо  $OMN \cap O'PQ = \emptyset$ , тогда  $OMN \cap \partial O'PQ = \partial OMN \cap O'PQ = \emptyset$ ,
- либо  $OMN \cap O'PQ$  является невырожденным отрезком, имеющим два конца, тогда  $|OMN \cap \partial O'PQ| \equiv_2 |\partial OMN \cap O'PQ|$ .

Сравнение (4) аналогично сравнениям (1) и (2).  $\square$

**Утверждение 4.2.7** (о проекции; ср. утверждение о проекции 4.1.2'). *Пусть вершины ортогональной проекции некоторого двухкомпонентного зацепления на некоторую плоскость находятся в общем положении (см. определение в §1.3). В точках, где проекции компонент пересекаются, отметим, какая из компонент «проходит выше» другой (как на рис. 4.2.1 и 4.2.2). Зацепление является зацепленным по модулю 2 тогда и только тогда, когда число точек пересечения, где первая компонента проходит выше второй, нечетно.*

**Замечание 4.2.8.** (а) Пусть существует «изотопия» ([Sk20u, §1], §4.4) между двумя двухкомпонентными зацеплениями, при которой вторая компонента неподвижна. Тогда след первой компоненты является сингулярным (т.е. криволинейным и самопересекающимся) цилиндром, не пересекающим вторую компоненту. Если после изотопии компоненты содержатся в непересекающихся шарах, то цилиндр может быть дополнен до сингулярного диска, не пересекающего второй компоненты. Это мотивирует неформальное описание в начале §4.2.

(б) Для точки  $O$  и подмножества  $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$  сингулярным конусом  $O * \Gamma$  над  $\Gamma$  называется объединение отрезков  $\bigcup_{M \in \Gamma} OM$ . Если  $OM \cap ON = \{O\}$  для каждой двух различных точек  $M, N \in \Gamma$ , то сингулярный конус называется просто конусом.

(с) Существуют зацепление  $(a, b)$  и точка  $O$  в общем положении с этим зацеплением, такие что зацепление является зацепленным по модулю 2, но  $|(O * a) \cap b|$  четно.

Действительно, возьмем узел  $a$ , у которого есть непересекающиеся скрещивающиеся ребра  $PQ$  и  $RS$ , возьмем точку  $O$ , такую что треугольники  $OPQ$  и  $ORS$  имеют общую точку, отличную от  $O$ , и возьмем узел  $b$ , проходящий через эту точку.

(d) Следующее эквивалентное определение зацепленности по модулю 2 более наглядно, но с ним сложнее работать (поскольку (c) показывает, что нужно более сильное условие общего положения, приведенное ниже).

Зацепление  $(a, b)$  является *зацепленным по модулю 2*, если  $|(O * a) \cap b|$  нечетно для некоторой (или, что эквивалентно, для любой) точки  $O$ , такой что

- ни одна вершина узла  $b$  не принадлежит  $O * a$  и
- если  $M$  является либо вершиной ломаной  $a$ , либо точкой ломаной  $a$ , для которой внутренность отрезка  $OM$  пересекает  $a$ , то  $b \cap OM = \emptyset$ .

**Утверждение 4.2.9.** (a) (Конвей–Гордон–Закс) *В пространстве даны 6 точек. Любые две из них соединены несамопересекающейся ломаной, причем пересекаются только ломаные, имеющие общий конец, и только в этом конце. Тогда найдутся два зацепленных по модулю 2 цикла длины 3. (Иными словами, в образе любого кусочно-линейного вложения графа  $K_6$  в пространство найдутся два зацепленных по модулю 2 цикла длины 3.)*

(b) (Закс) *В пространстве даны 4 красные и 4 синие точки. Любые две разноцветные из них соединены несамопересекающейся ломаной, причем пересекаются только ломаные, имеющие общий конец, и только в этом конце. Тогда найдутся два зацепленных по модулю 2 цикла длины 4. (Иными словами, в образе любого кусочно-линейного вложения графа  $K_{4,4}$  в пространство найдутся два зацепленных по модулю 2 цикла длины 4.)*

Эти утверждения доказываются аналогично их «линейным» аналогам [Sk14, §2]. См. простое доказательство в [Zi13].

### 4.3 Коэффициент зацепления замкнутых ломаных

Мотивировки к нижеприведенному строгому определению коэффициента зацепления аналогичны мотивировкам, приведенным в начале §4.2. Альтернативные определения приведены в утверждении о проекции 4.3.5, в замечании 4.3.6.ab, а также в §4.9.

Отрезок и треугольник называются *трансерсальными*, если вектор  $e$  отрезка вместе с базисом  $f_1, f_2$  плоскости треугольника образуют базис  $e, f_1, f_2$  пространства.

**Знаком**  $\text{sgn } X$  точки пересечения  $X$  трансерсальных ориентированных отрезка и треугольника называется число  $+1$ , если вектор  $e$  отрезка вместе с положительным базисом  $f_1, f_2$  треугольника образуют положительный базис  $e, f_1, f_2$  пространства, и число  $-1$  в противном случае. Иными словами, *знаком* называется число  $+1$ , если ориентации отрезка и треугольника согласованы по правилу *левой руки* (*левого винта*), и  $-1$ , если не согласованы.

**Коэффициентом зацепления**  $\text{lk}(a, b)$  ориентированного зацепления  $(a, b)$  называется

$$\text{lk}(a, b) := \sum_{MN} \sum_{X \in OMN \cap b} \text{sgn } X,$$

где точка  $O$  находится в общем положении с зацеплением и первое суммирование ведется по ориентированным ребрам  $MN$  узла  $a$ .

**Задача 4.3.1.** Найдите коэффициенты зацепления зацеплений на рис. 4.2.1. (Возьмите некоторую ориентацию зацеплений с данной проекцией на ваш выбор; используйте без доказательства лемму 4.3.2.a.)

**Лемма 4.3.2.** (a) (Ср. лемму 4.2.4.а.) Коэффициент зацепления корректно определен, т.е. не зависит от выбора точки  $O$ .

(b) Для каждого  $n \in \mathbb{Z}$  существует ориентированное зацепление, имеющее коэффициент зацепления  $n$ .

(c) Коэффициент зацепления аддитивен по отношению к связной сумме двухкомпонентных зацеплений.

(d) Для каждой тройки целых чисел  $k, l, t$  существует трехкомпонентное ориентированное зацепление с попарными коэффициентами зацепления  $k, l, t$ .

Лемма 4.3.2.а и утверждения 4.3.4, 4.3.5, 4.4.4 доказываются аналогично их аналогам по модулю 2, с использованием подходящей версии следующей леммы.

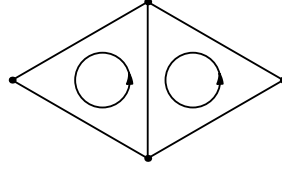


Рис. 4.3.1: Согласованные ориентации

**Лемма 4.3.3** (ср. лемму о тривиальности 1.3.4 и лемму о четности 4.2.5). (a) Даны замкнутая ориентированная несамопересекающаяся ломаная и ориентированный тетраэдр (т.е. тетраэдр с согласованными ориентациями граней, см. рис. 4.3.1). Ломаная не пересекает ребер тетраэдра, и ни одна из вершин ломаной не лежит на поверхности тетраэдра. Тогда сумма знаков точек пересечения ломаной и поверхности тетраэдра нулевая.

(b) То же, но тетраэдр может быть вырожденным (т.е. лежать в плоскости), и утверждается, что  $\sum_{\alpha} \sum_{X \in \alpha \cap b} \text{sgn } X = 0$ , где суммирование идет по граням  $\alpha$  тетраэдра, а  $b$  — ориентированная ломаная.

**Утверждение 4.3.4** (о симметричности). (a) (Ср. утверждение о симметричности 4.2.6.) Коэффициент зацепления пары ломаных не зависит от порядка ломаных.

(b) Изменение ориентации одной из компонент меняет коэффициент зацепления на противоположный.

(c) Зеркальная симметрия меняет коэффициент зацепления на противоположный.

**Утверждение 4.3.5** (о проекции). В условиях утверждения о проекции 4.2.7, для ориентированного зацепления коэффициент зацепления равен сумме знаков (определение приведено в §1.3) тех точек пересечения, в которых первая компонента проходит над второй.

**Замечание 4.3.6.** (a) Пусть  $f, g : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$  — (кусочно-линейные, гладкие или непрерывные) отображения с непересекающимися образами. Коэффициент зацепления их ориентированных образов равен степени [Sk20, §8] отображения  $S^1 \times S^1 \rightarrow S^2$ , определяемого формулой  $(x, y) \mapsto \frac{f(x) - g(y)}{|f(x) - g(y)|}$ .

(b') (a discretization of (b)) Let  $a$  and  $b$  be disjoint oriented closed polygonal lines in 3-space. Their linking number equals the sum  $\frac{1}{4\pi} \sum_{MN, PQ} \Omega(MN, PQ)$  over all oriented edges

$MN$  of  $a$  and  $PQ$  of  $b$ , where  $\Omega(MN, PQ)$  is the oriented solid angle given by the set of vectors from points of  $MN$  to points of  $PQ$ , i.e. is the oriented area of the spherical quadrilateral formed by vectors  $\vec{MP}, \vec{MQ}, \vec{NQ}, \vec{NP}$  in this order.



(b) (the Gauss integral formula for linking number) Для непересекающихся гладких замкнутых кривых  $f, g : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$  имеем

$$\text{lk}(f, g) = \int_{[0, 2\pi]^2} \frac{f(x) - g(y)}{|f(x) - g(y)|^3} \wedge f'(x) \wedge g'(y) dx dy.$$

(c) Для вложения графа в  $\mathbb{R}^3$  можно определить аналог коэффициента зацепления — инвариант  $Vu$  (аналогично пп. 1.5, 1.6). См. подробнее [Sk06, §§4,5].

(d) См. утверждения 6.14.2.abc и дальнейшие обсуждения в [BE82, §19], [RN11].

## 4.4 Изотопность зацеплений

**Утверждение 4.4.1** (устойчивость). Для любого двухкомпонентного зацепления существует  $\delta > 0$ , такое что при любом сдвиге вершин ломаных на расстояния, не превышающие  $\delta$ ,

(a) сдвинутые компоненты не пересекаются;

(b) сдвинутые компоненты зацеплены по модулю 2 тогда и только тогда, когда исходные компоненты зацеплены по модулю 2.

Часть (a) доказывается несложно. А вот для доказательства части (b) полезно понятие изотопности зацеплений, введенное ниже.

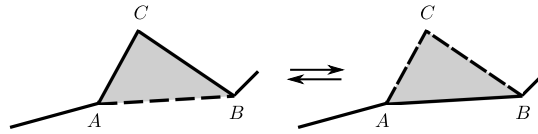


Рис. 4.4.1: Элементарная изотопия

Пусть стороны  $AC$  и  $CB$  треугольника  $ABC$  — ребра некоторого узла, не пересекающего треугольник  $ABC$  ни в каких других точках. *Элементарная изотопия*  $ACB \rightarrow AB$  — замена двух ребер  $AC$  и  $CB$  ребром  $AB$  (рис. 4.4.1). Два узла называются (кусочно-линейно объемлемо) **изотопными**, если их можно соединить последовательностью узлов, в которой соседние получаются друг из друга элементарной изотопией.

Аналогичным образом определяется изотопность зацеплений.

**Утверждение 4.4.2.** *Изотопные (даже кусочно-линейно сингулярно гомотопные) двухкомпонентные зацепления одновременно зацеплены по модулю 2 или не зацеплены по модулю 2.*

*Набросок доказательства.* Достаточно рассмотреть элементарную изотопию  $ACB \rightarrow AB$ , меняющую зацепление  $(a, b)$  на зацепление  $(a', b)$ . Существует точка  $O$  общего положения, т.е.

- находящаяся в общем положении с  $(a, b)$ , в общем положении с  $(a', b)$ , причем
- такая что никакая вершина ломаной  $b$  не лежит на поверхности тетраэдра  $OABC$  и  $b$  не пересекает ребер  $OABC$ .

Так как  $ABC \cap b = \emptyset$ , то по лемме о четности 4.2.5 имеем

$$|OAC \cap b|_2 + |OCB \cap b|_2 = |OAB \cap b|_2.$$

Используя точку  $O$ , получим, что зацепления  $(a, b)$  и  $(a', b)$  либо оба зацеплены по модулю 2, либо оба не зацеплены по модулю 2. QED

**Тривиальным зацеплением** (с любым числом компонент) называется зацепление, состоящее из попарно непересекающихся треугольников.

**Пример 4.4.3.** *Существует двухкомпонентное зацепление, не зацепленное по модулю 2 и не изотопное тривиальному.*

В качестве примера можно взять любое зацепление с коэффициентом зацепления 2, например, третье зацепление на рис. 4.2.1. Неизотопность доказывается при помощи коэффициента зацепления; она следует из результата задачи 4.3.1, леммы 4.3.2.a и утверждения 4.4.4.ab.

**Утверждение 4.4.4.** *(a) Изотопные ориентированные двухкомпонентные зацепления имеют равные коэффициенты зацепления.*

*(b) Изотопные двухкомпонентные зацепления имеют равные модули коэффициентов зацепления.*

**Пример 4.4.5.** *Существует двухкомпонентное зацепление, имеющее нулевой коэффициент зацепления, но не изотопное тривиальному.*

Примером является зацепление Уайтхеда (рис. 4.2.2.w и предпоследнее зацепление на рис. 4.2.1). Неизотопность доказывается через «высший коэффициент зацепления» (число Сато–Левина); она следует из результатов задач 4.10.10.abg.

**Замечание 4.4.6.** Справедлив аналог утверждений 4.4.1.ab для треугольников и их зацепленности. Обсудим доказательство аналога утверждения 4.4.1.b.

Пусть никакие четыре из шести вершин двух треугольников не лежат в одной плоскости. Количество точек пересечения отрезков и треугольников (из пяти вершин которых никакие четыре не лежат в одной плоскости) сохраняется при достаточно малом шевелении этих пяти вершин. Тогда аналог утверждения 4.4.1.b вытекает из следующего результата (который следует из простого частного случая леммы 4.2.5).

*Пусть никакие четыре из семи вершин треугольника  $\Delta$  и точек  $A, B, C, X, Y, Z, Z'$  не лежат в одной плоскости. Если  $(XZZ' \cup YZZ') \cap \partial\Delta = \emptyset$ , то пары  $(\Delta, XYZ)$  и  $(\Delta, XYZ')$  либо обе зацеплены, либо обе не зацеплены.*

Интересно, что перенесение столь естественного рассуждения на общий случай включает технические сложности, поэтому для общего случая удобнее использовать более общее понятие зацепленности ломаных по модулю 2: аналог утверждения 4.4.1.b вытекает из утверждения 4.4.1.b и леммы 4.2.4.b.

## 4.5 Комбинаторная изотопность зацеплений треугольников

Если вершины двух треугольников движутся непрерывно так, что контуры треугольников в любой момент не пересекаются, то треугольники остаются зацепленными или незацепленными. Строгая формулировка этого факта на «дискретном» языке (утверждение 4.5.1.a) использует нижеприведенное понятие комбинаторной изотопности.

Мы не различаем треугольники, отличающиеся перестановкой вершин. Пусть  $(\Delta, XYZ)$  — зацепление двух треугольников, а  $Z'$  — точка вне прямой  $XY$ , для которой  $(XZZ' \cup YZZ') \cap \partial\Delta = \emptyset$ . Тогда *элементарной комбинаторной изотопией* назовем замену  $XYZ$  на  $XYZ'$ . *Элементарной комбинаторной изотопией* назовем также аналогичное преобразование первого треугольника при неизменном втором. Два зацепления треугольников назовем *комбинаторно изотопными*, если их можно соединить последовательностью зацеплений треугольников, в которой соседние получаются друг из друга элементарной комбинаторной изотопией.

**Утверждение 4.5.1.** *(a) Комбинаторно изотопные зацепления треугольников одновременно зацеплены или не зацеплены. (Значит, существуют два зацепления треугольников, не являющиеся комбинаторно изотопными.)*

(b) Если два треугольника не зацеплены, то образованное ими зацепление комбинаторно изотопно тривиальному зацеплению треугольников.

(c) Любые две пары зацепленных треугольников комбинаторно изотопны.

Пункт (a) следует из утверждения 4.4.1.b (или из леммы 4.2.4.b или утверждения 4.4.2), поскольку элементарную комбинаторную изотопию можно сделать за две элементарные изотопии. Пункт (c) вытекает из свойства 4.1.1.(2); записать доказательство интересно, ибо оно даст алгоритм преобразования пары зацепленных треугольников к стандартному виду, а также позволит подойти к гипотезам 5.2.6, 5.2.8. Ср. [Ko19], [Sk20c, утверждение 4.5].

**Замечание 4.5.2.** (a) Из утверждений 4.5.1.bc вытекает, что любое зацепление треугольников комбинаторно изотопно либо тривиальному зацеплению, либо зацеплению треугольников, аналогичному зацеплению Хопфа на рис. 4.2.1. (Иными словами, два треугольника зацеплены тогда и только тогда, когда соответствующее зацепление не тривиально.)

(b) Было бы интересно доказать, что существуют три зацепления ориентированных треугольников, для которых любое такое зацепление ориентированно комбинаторно изотопно одному из них. (Дайте необходимые определения самостоятельно. Это аналог утверждений 4.5.1.bc.)

(c) Из утверждения 4.5.1.c вытекает, что комбинаторная изотопность пар треугольников равносильна изотопности (определенной в п. 4.4). Было бы интересно выяснить, равносильны ли они для зацеплений более двух треугольников.

## 4.6 Сингулярная гомотопность зацеплений

Введем естественное понятие *сингулярной гомотопности* зацеплений, относительно которого «полным» инвариантом двухкомпонентных зацеплений является коэффициент зацепления (теорема 4.6.1, ср. с примером 4.4.5). «Полным» инвариантом трехкомпонентных зацеплений относительно сингулярной гомотопности окажется «тройной» коэффициент зацепления, введенный в §4.10 (см. теорему Милнора 4.7.4).

Говоря неформально, два зацепления называются *сингулярно гомотопными*, если одно из зацеплений можно привести к другому непрерывной деформацией, при которой не возникает пересечений разных компонент (но могут появляться самопересечения компонент). Приведем строгое определение (для неориентированных зацеплений; определение для ориентированных зацеплений аналогично).

Пусть  $AC$  и  $CB$  являются последовательными ребрами одной компоненты  $a$  зацепления и ни одна из остальных компонент не пересекает треугольника  $ABC$ . *Элементарной сингулярной гомотопией* называется замена в  $a$  двух ребер  $AC$  и  $CB$  ребром  $AB$ . Два зацепления называются *сингулярно гомотопными*, если их можно соединить последовательностью зацеплений, в которой каждые два соседних зацепления элементарно сингулярно гомотопны. (Или, что эквивалентно, если некоторая плоская диаграмма одного зацепления может быть преобразована в некоторую плоскую диаграмму второго зацепления движениями Рейдемейстера и изменениями перекрестков одной из компонент, все эти определения приведены в [Sk20c, §3].)

Например, зацепление Уайтхеда сингулярно гомотопно тривиальному зацеплению.

Приведем стандартное более общее определение (используемое только в замечании 4.6.2). Отображение  $f : X_1 \sqcup X_2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  называется *сингулярным зацеплением*, если  $f(X_1) \cap f(X_2) = \emptyset$ . Более общо, отображение  $f : X_1 \sqcup \dots \sqcup X_n \rightarrow \mathbb{R}^3$  называется *сингулярным зацеплением*, если  $f(X_i) \cap f(X_j) = \emptyset$  для любых  $i, j$ . Сингулярные зацепления  $f_0, f_1 : X \rightarrow \mathbb{R}^3$ , где  $X := X_1 \sqcup \dots \sqcup X_n$ , называются *сингулярно гомотопными*, если

существует семейство  $f_t : X \rightarrow \mathbb{R}^3$  сингулярных зацеплений, непрерывно зависящих от  $t \in [0, 1]$ .

**Теорема 4.6.1.** *Ориентированные двухкомпонентные зацепления сингулярно гомотопны тогда и только тогда, когда их коэффициенты зацепления равны.*

Необходимость доказывается аналогично утверждению 4.4.4.a. Доказательство достаточности сложнее, и мы не рекомендуем начинающему пытаться его придумать (сначала приводят первые компоненты к «стандартным», а затем совмещают вторые компоненты в дополнении к совпадающим стандартным первым).

**Замечание 4.6.2.** (a) Возьмем двухкомпонентное сингулярное зацепление, у которого первая компонента — одно из колец Борромео (рис. 4.2.2.b), а вторая — объединение других двух колец. Это сингулярное зацепление сингулярно гомотопно тривиальному зацеплению.

(b) Двухкомпонентные сингулярные зацепления, состоящие из дизъюнктного объединения двух графов (не обязательно связных), сингулярно гомотопны тогда и только тогда, когда у них равны наборы коэффициентов зацепления для циклов из разных компонент [Sk00].

## 4.7 Кольца и треугольники Борромео

**Пример 4.7.1** (кольца Борромео). (a) *Существует трехкомпонентное зацепление, не изотопное тривиальному, каждое двухкомпонентное подзацепление которого изотопно тривиальному (рис. 4.2.2.b и 4.7.1).*

(b) *Для каждого  $r$  существует  $r$ -компонентное зацепление, не изотопное тривиальному, каждое  $(r - 1)$ -компонентное подзацепление которого изотопно тривиальному. [BL, BL4]*

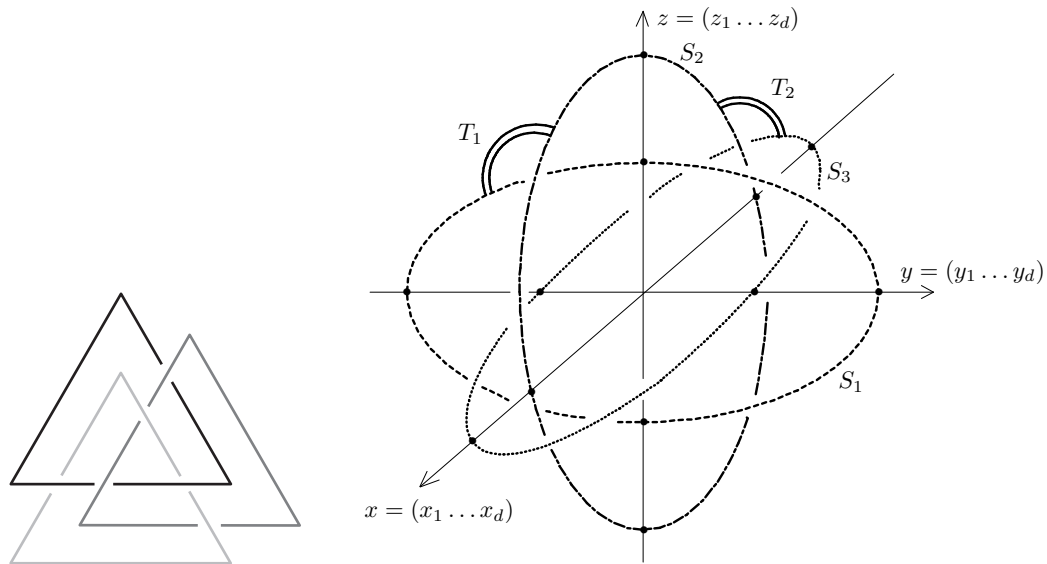


Рис. 4.7.1: Слева: треугольники Борромео. Справа: эллипсы Борромео. Верстальщику: замените  $d$  на  $l$ ; уберите линии  $T_1, T_2$  и их обозначения

В качестве колец Борромео можно взять три эллипса (рис. 4.7.1, справа), заданные уравнениями

$$\begin{cases} x = 0 \\ y^2 + 2z^2 = 1 \end{cases}, \quad \begin{cases} y = 0 \\ z^2 + 2x^2 = 1 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} z = 0 \\ x^2 + 2y^2 = 1 \end{cases}.$$

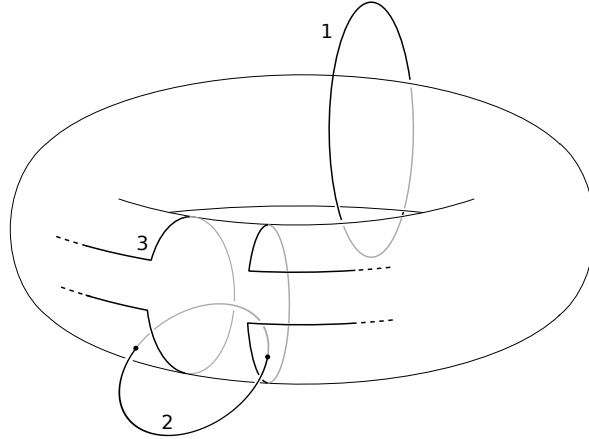


Рис. 4.7.2: Построение колец Борромео при помощи тора

*Построение колец Борромео при помощи тора.* См. рис. 4.7.2. Рассмотрим *стандартный тор*, т.е. фигуру, образованную вращением окружности  $(x - 2)^2 + y^2 = 1$  вокруг оси  $Oy$ . Первая кривая — окружность вне тора, близкая к меридиану тора. Вторая кривая — окружность вне тора, зацепленная с меридианом тора и пересекающая тор в двух точках. Третья кривая — кривая на торе, близкая к границе квадрата, полученного из тора разрезанием вдоль параллели и меридиана.

Ясно, что построенные три ломаные (или кривые) попарно не зацеплены. Нетривиальность в примере 4.7.1.a следует из лемм 4.10.1.ab и утверждения 4.10.2. Аналогично доказываются пример 4.7.1.b и утверждения 4.7.3.ab.

*Другое доказательство нерасцепляемости* использует *фундаментальную группу* (см., например, [Sk20, п. 14.1]). Приведем это доказательство для построения на рис. 4.7.2. Обозначим через  $S$  и  $S'$  первую и вторую кривую. Группа  $\pi_1(\mathbb{R}^3 - S - S')$  изоморфна свободной группе с двумя образующими. Параллель и меридиан тора (произвольно ориентированные) представляют первую и вторую образующие соответственно. Третья кривая представляет их коммутатор. Так как он не равен единице и даже не сопряжен с ней, то третья кривая не гомотопна вне  $S \cup S'$  отображению в точку.

**Задача 4.7.2.** (a) Существует три треугольника, проекции которых показаны на рис. 4.7.1 слева (ср. [Val, CKS+, GSS+]).

(b) (нерешенная задача) При каких  $r$  существует  $r$  попарно непересекающихся треугольников со свойством из примера 4.7.1.b?

(c) (нерешенная задача) Опишите классы комбинаторной изотопности зацеплений трех треугольников. (*Комбинаторная изотопность* зацеплений из трех треугольников определяется аналогично случаю пар. Гипотеза и продвижения приведены в [Ko19].)

**Задача 4.7.3.** (a) Существуют два не изотопных (даже не сингулярно гомотопных) ориентированных трехкомпонентных зацепления с попарными коэффициентами зацепления  $2, 0, 0$ , сужения которых на любое двухкомпонентное подзацепление изотопны.

(b) Зацепление «кольца Борромео»  $B$  не является сингулярно гомотопным тривиальному зацеплению.

(c) Для некоторого ориентированного трехкомпонентного зацепления  $L$  с попарными коэффициентами зацепления  $1, 0, 0$  некоторая связная сумма  $B \# L$  сингулярно гомотопна  $L$ .

(d) Любые два ориентированных трехкомпонентных зацепления с попарными коэффициентами зацепления  $1, 0, 0$  сингулярно гомотопны.

(e) Для некоторого ориентированного трехкомпонентного зацепления  $L$  с попарными коэффициентами зацепления  $2, 0, 0$  некоторая связная сумма  $B \# B \# L$  сингулярно

гомотопна  $L$ .

Доказательства пп. (a,b) используют §4.10. Доказательства пп. (c,d,e) могут быть непросты для начинающего.

**Теорема 4.7.4** (Милнор). *Множество классов сингулярной гомотопности трехкомпонентных ориентированных зацеплений с попарными коэффициентами зацепления  $k, l, m$*

- содержит бесконечно много элементов, если  $k = l = m = 0$ , и
- содержит  $\gcd(k, l, m)$  элементов иначе.

Этот результат легко получить из [Mi54] (хотя ранее он не был сформулирован столь явно). Ср. лемму 4.3.2.d. Мы предлагаем читателю привести простое доказательство, используя число Милнора по модулю  $\gcd(k, l, m)$ , определяемое аналогично §4.10 и принимающее значения в множестве остатков по модулю  $\gcd(k, l, m)$  (мы полагаем  $\gcd(0, 0, 0) = 0$ , так что  $|\mathbb{Z}_{\gcd(0,0,0)}| = |\mathbb{Z}| = \infty$ ). Это доказательство иллюстрируется задачами 4.7.3 и 4.10.9. Биекция между множеством из теоремы Милнора 4.7.4 и  $\mathbb{Z}_{\gcd(k,l,m)}$  задается числом Милнора по модулю  $\gcd(k, l, m)$ .

## 4.8 Алгебраическое число пересечений

Основные результаты этого пункта — леммы о четности 4.8.2 и о тривиальности 4.8.4. Они обобщают лемму о четности 1.3.3 и лемму 4.2.5 и соответственно лемму о тривиальности 1.3.4 и лемму 4.3.3. Приложения этого пункта приведены в п. 4.9 (который нужен для п. 4.10, который нужен для доказательств результатов п. 4.7). Изучение этого пункта можно начать с решения задачи 4.8.5, которая ярко иллюстрирует нетривиальность материала.

В этом пункте  $a$  — набор отрезков, а  $\beta$  — набор треугольников.

Наборы  $a$  и  $\beta$  называются находящимися в *общем положении*, если для любого отрезка  $MN$  из  $a$  и любого треугольника  $\Delta$  из  $\beta$  выполнено  $\{M, N\} \cap \Delta = MN \cap \Delta = \emptyset$ . Для таких наборов определим **алгебраическое число пересечений по модулю 2**

$$a \cap_2 \beta := \sum_{MN, \Delta} |MN \cap \Delta|_2 \in \mathbb{Z}_2,$$

где суммирование ведется по всем отрезкам  $MN$  из  $a$ , а также треугольникам  $\Delta$  из  $\beta$ . Это четность количества пар  $MN, \Delta$ , образованных пересекающимися отрезком  $MN$  из множества  $a$  и треугольником  $\Delta$  из множества  $\beta$ .

*Вершинами* набора отрезков (треугольников) называются концы его отрезков (вершины его треугольников). *Телом*  $|\gamma|$  набора  $\gamma$  отрезков (треугольников) называется объединение его отрезков (треугольников).

**Замечание 4.8.1.** (a) Алгебраическое число пересечений нужно для работы с непесекающимися ломаными, вершины которых ни в каком смысле не находятся в общем положении. Кроме того, чем больше размерность евклидова пространства и пересекающихся объектов, тем более громоздкими становятся условия общего положения, необходимые для работы с *геометрическими* пересечениями, см. (ii) в (d).

(b) Если никакие четыре вершины отрезков из  $a$  и треугольников из  $\beta$  не лежат в одной плоскости, то  $a$  и  $\beta$  находятся в общем положении.

(c) Для любого треугольника  $\Delta$  выполнено  $a \cap_2 \Delta = ||a| \cap \Delta|_2$ , если никакие четыре вершины отрезков из  $a$  не лежат в одной плоскости (но не без этого условия).

(d) Набор точек находится в *общем положении*, если

- (i) никакие 4 из них не лежат в одной плоскости и
- (ii) для любых пары  $x$ , тройки  $y$  и тройки  $y'$  среди них, для которых  $x \cap y = x \cap y' = \emptyset$  и  $y \neq y'$ , прямая, проходящая через  $x$ , плоскость, проходящая через  $y$ , и плоскость, проходящая через  $y'$ , не имеют общих точек. (Плоскость, проходящая через  $y$ , определена, так как если точки множества  $y$  лежат на одной прямой, то, добавив к ним точку из  $x$ , получим противоречие с условием (i).)
- (e) Имеем  $a \cap_2 \beta = ||a| \cap |\beta||_2$ , если все вершины отрезков из  $a$  и треугольников из  $\beta$  находятся в общем положении (но не без этого условия, см. замечание 4.2.8.c).
- (f) Для любого  $N$  существуют  $N$  точек общего положения в пространстве. Построение аналогично задаче 1.3.2.b.

Определения 1-цикла и 2-цикла в пространстве аналогичны случаю плоскости, см. замечание 1.3.6. Ср. [?].

**Лемма 4.8.2** (о четности). *Если 1-цикл  $a$  и 2-цикл  $\beta$  находятся в общем положении, то  $a \cap_2 \beta = 0$ .*

Аналогично другому доказательству леммы о четности 1.3.3.b, использующему сингулярный конус, лемма следует из своего частного случая, в котором 2-цикл является множеством всех граней тетраэдра (возможно, вырожденного; можно дополнительно предполагать, что 1-цикл является треугольником). Этот случай аналогичен лемме 4.2.5.<sup>22</sup>

**Замечание 4.8.3.** (a) Если вершины замкнутой ломаной и 2-цикла находятся в общем положении (см. замечание 4.8.1.d), то ломаная пересекает тело 2-цикла в четном числе точек.

(b) Если условие (ii) из замечания 4.8.1.d требовать только для попарно непересекающихся  $x, y, y'$ , то полученный аналог утверждения (a) будет неверен (аналогично замечанию 4.2.8.c).

(c) Леммы о четности 1.3.3 и 4.8.2, а также их обобщения на  $p$ -циклы и  $q$ -циклы в  $\mathbb{R}^{p+q}$  известны в фольклоре. Например, [Sk03, лемма о четности 3] сформулирована в качестве простого результата — без явного определения общего положения, а также в терминах тел (как в (a), в замечании 4.8.1.e и в the Parity Lemma 1.3.3.b). Однако дать правильную формулировку леммы о четности, либо явно определив общее положение (как в замечании 4.8.1.d), либо используя алгебраические пересечения (как в лемме о четности 4.8.2), не так просто, как может показаться. Например, случай  $p = q = 1$  (для 1-циклов на плоскости) неверно сформулирован в [Pr04, задача 1.2], а случай  $p = 1, q = 2$  (для 1-цикла и 2-цикла в трехмерном пространстве) неверно сформулирован в лемме 4.6 в архивной версии 6 статьи [Sk14] (соответствующие утверждения в других версиях верны).

**Целочисленным** (или ориентированным) **1-циклом** называется набор (не обязательно различных) ориентированных отрезков (не вырожденных в точку), такой что для каждой точки количество входящих отрезков равно количеству исходящих.

**Целочисленным** (или ориентированным) **2-циклом** называется набор (не обязательно различных) ориентированных треугольников (не вырожденных в отрезок или

<sup>22</sup>Аналогично, лемма о четности 4.8.2 следует из своего частного случая, в котором 1-цикл является треугольником. В этом случае пересечение 2-цикла и плоскости треугольника является набором отрезков, образующих 1-цикл на плоскости, и множеств, не пересекающих треугольник. Поэтому частный случай следует из леммы о четности 1.3.3.c (точнее, из ее версии, в котором одна ломаная является треугольником, а другая заменяется на 1-цикл, см. замечание 1.3.6.a).

точку), такой что для каждого ориентированного отрезка количество входящих треугольников равно количеству исходящих (рис. 4.3.1). Ориентированный треугольник  $ABC$  входит в ориентированный отрезок  $BA$  и выходит из ориентированного отрезка  $AB$ .

**Лемма 4.8.4** (о тривиальности). *Если целочисленные 1-цикл и 2-цикл находятся в общем положении, то сумма знаков точек пересечения по всем парам пересекающихся отрезков 1-цикла и треугольников 2-цикла равна нулю.*

**Задача 4.8.5.** (Этот яркий частный случай лемм о четности 4.8.2 и о тривиальности 4.8.4 предлагался 01.04.2015 на ФОПФ МФТИ в курсе «Современные топологические методы в физике».)

В пространстве имеется 17 точек: 7 красных и 10 желтых. Никакие четыре из них не лежат в одной плоскости.

(а) Может ли количество пар пересекающихся красного отрезка (т.е. отрезка, соединяющего красные точки) и желтого треугольника (т.е. треугольника, натянутого на желтые точки) быть равным 7?

*Указание.* Если красных точек 3, а желтых — 4, то количество таких пар четно, см. лемму 4.2.5. Далее аналогично утверждению 1.3.5.а.

*Примечание.* Рассматриваемое количество равно количеству точек пересечения красных отрезков и желтых треугольников только в предположении, что никакой красный отрезок не пересекает никакой отрезок пересечения желтых треугольников.

(б) После решения пункта (а) Илья Муромец подошел к точкам поближе. Он увидел, что по красным отрезкам течет ток. Чу! Сколько в красную точку миллиампер входит, столько из нее и выходит.

А по ориентированным желтым треугольникам свистит свист. Т.е. на каждом ориентированном желтом треугольнике стоит соловьеметр, измеряющий свист в Соловьях ( $1C=1A^2$ ). Чу! Сколько в ориентированный желтый отрезок микросоловьев входит, столько из него и выходит.

Для каждой пары пересекающихся красного отрезка и желтого треугольника имеется гривнометр. По закону Владимира-Красное-Солнышко показание гривнометра равно произведению показаний соответствующих амперметра и соловьеметра, если направление красного тока и ориентация желтого треугольника согласованы по правилу *левой руки (буравчика)*, и минус этому произведению, если не согласованы. (Таким образом,  $1 \text{ Грн} = 1C \times 1A = 1A^3$ .)

За понимание условия пункта (б) князь одарил Илью величиной *потока тока через свист*, т.е., суммой показаний гривнометров. Могли ли так располагаться точки, течь ток по красным отрезкам и свистеть свист по желтым треугольникам, что Илья получил 42 наногривны?

*Указание.* Если красных точек 3, а желтых — 4, то поток тока через свист равен нулю ввиду леммы 4.3.3.

## 4.9 Коэффициент зацепления и зейфертовы цепи

Здесь мы приводим более общие определения коэффициента зацепления (утверждения 4.9.3 и 4.9.5), которые используются в §4.10, а также интересны сами по себе.

**Зейфертовой цепью** (или кограницей) узла  $a$  называется конечный набор  $S$  треугольников (не вырожденных в отрезок или точку), такой что

- каждое ребро узла  $a$  является стороной ровно одного треугольника из  $S$ ;
- каждый отрезок, не являющийся ребром из  $a$ , является стороной четного (возможно, нулевого) количества треугольников из  $S$ .



Примерами зейфертовых цепей являются набор треугольников сингулярного конуса  $O * a$  для некоторой точки  $O$  (замечание 4.2.8.b), а также триангуляция *поверхности Зейферта* [Pr95, §3]. Более общие зейфертовы цепи, чем сингулярные конусы, нам нужны, например, для определения числа Милнора, т.е. для нижеприведенной леммы 4.9.4.

Для множества  $\beta$  треугольников положим  $\partial\beta := \sum_{\Delta \in \beta} \partial\Delta$ , где суммирование ведется по модулю 2.

**Задача 4.9.1.** (а) Если  $S$  является зейфертовой цепью узла  $a$ , то  $\partial S$  является 1-циклом, тело которого совпадает с  $a$ .

(б) Для одной из компонент зацепления Уайтхеда нарисуйте зейфертову цепь, не пересекающую оставшуюся компоненту.

(с) Для одного из колец Борромео нарисуйте зейфертову цепь, не пересекающую объединение двух других колец.

**Лемма 4.9.2.** *Для любых непересекающихся узлов  $a$  и  $b$  существует зейфертова цепь  $S$  узла  $a$ , находящаяся в общем положении с  $b$  (определение приведено в начале §4.8).*

**Утверждение 4.9.3.** *Следующие условия эквивалентны для зацепления  $(a, b)$ :*

- (i) *зацепление не зацеплено по модулю 2;*
- (ii) *для некоторой (или, что эквивалентно, для любой) зейфертовой цепи  $S$  узла  $a$ , находящейся в общем положении с  $b$ , выполнено  $b \cap_2 S = 0$ ;*
- (iii) *существует зейфертова цепь узла  $a$ , тело которой не пересекает  $b$ ;*
- (iv) *для некоторой (или, что эквивалентно, для любой) зейфертовой цепи  $S$  узла  $a$ , для которой контур любого треугольника из  $S$  не пересекает  $b$ , количество треугольников из  $S$ , зацепленных по модулю 2 с  $b$ , четно;*
- (v) *для некоторых (или, что эквивалентно, для любых) зейфертовых цепей  $S$  узла  $a$  и  $T$  узла  $b$ , таких что контур любого треугольника из  $S$  не пересекает контура ни одного треугольника из  $T$ , количество зацепленных по модулю 2 пар  $(\Delta, \Gamma)$  треугольников  $\Delta$  из  $S$  и  $\Gamma$  из  $T$  четно.*

*Набросок доказательства.* Эквивалентность (i)  $\Leftrightarrow$  (ii) и эквивалентность «для некоторого» и «для любого» в (ii) следуют из леммы о четности 4.8.2.

Очевидно, что (iii)  $\Rightarrow$  (ii). Обратная импликация доказывается сдвигом  $S$  в общее положение так, чтобы  $||S| \cap b|$  было четным, а также добавлением ручек к  $|S|$ .

Эквивалентность (ii)  $\Leftrightarrow$  (iv) ((ii)  $\Leftrightarrow$  (v)) получается из первого равенства (из обоих равенств)

$$b \cap_2 S = \sum_{\Delta \in S} b \cap_2 \Delta = \sum_{\Delta \in S, \Gamma \in T} \partial\Gamma \cap_2 \Delta.$$

Эти равенства следуют из аддитивности алгебраического пересечения, второе из них — с учетом утверждения 4.9.1.а.  $\square$

**Лемма 4.9.4.** *Если  $(a, b, c)$  — зацепление, в котором  $a$  не зацеплено по модулю 2 ни с  $b$ , ни с  $c$ , то существует зейфертова цепь узла  $a$ , тело которой не пересекает  $b \cup c$ .*

Эта лемма доказывается при помощи утверждения 4.9.3.

Аналогично вышесказанному определяется *целочисленная зейфертова цепь  $S$*  ориентированного узла  $a$ , ее *тело*, а также *алгебраическое число пересечений  $S \cdot b \in \mathbb{Z}$* . Следующие результаты доказываются аналогично их аналогам по модулю 2 (утверждению 4.9.3 и лемме 4.9.4).

**Утверждение 4.9.5.** *Пусть  $(a, b)$  — ориентированное зацепление.*

(a) Для любой зейфертовой цепи  $S$  узла  $a$  в общем положении с  $b$  выполнено  $\text{lk}(a, b) = S \cdot b$ .

(b) Целочисленная зейфертова цепь узла  $a$ , тело которой не пересекает  $b$ , существует тогда и только тогда, когда  $\text{lk}(a, b) = 0$ .

**Лемма 4.9.6.** Если  $(a, b, c)$  — ориентированное зацепление, для которого  $\text{lk}(a, b) = \text{lk}(a, c) = 0$ , то существует целочисленная зейфертова цепь узла  $a$ , тело которой не пересекает  $b \cup c$ .

**Задача 4.9.7.** (a) Аналогично вышесказанному определите зейфертову цепь  $S_a$  по модулю 3 ориентированного узла  $a$ , ее тело, а также алгебраическое число пересечений  $S_a \cdot b \in \mathbb{Z}_3$  по модулю 3.

(b), (c), (d) Сформулируйте и докажите аналоги по модулю 3 утверждений 4.9.5.ab и леммы 4.9.6.

## 4.10 Тройной коэффициент зацепления

В этом разделе через  $(a_1, a_2, a_3)$  обозначается трехкомпонентное зацепление, компоненты которого попарно не зацеплены по модулю 2.

По лемме 4.9.4 существуют зейфертовы цепи  $S_1, S_2, S_3$  узлов  $a_1, a_2, a_3$ , такие что  $|S_i| \cap a_j = \emptyset$  для всех  $i \neq j$ . Более того, можно выбрать зейфертовы цепи в тройном общем положении, т.е. такие что для любых треугольников  $\Delta_k \in S_k$ ,  $k = 1, 2, 3$ , пересечение  $\Delta_1 \cap \Delta_2 \cap \Delta_3$  либо пусто, либо является внутренней точкой в каждом из треугольников  $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ . Зацепление  $(a_1, a_2, a_3)$  называется **зацепленным по модулю 2**, если количество троек  $(\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3)$ , имеющих общую точку, нечетно.

Ясно, что это свойство не зависит от перестановки трех компонент.

**Лемма 4.10.1.** (a) Кольца Борромео зацеплены по модулю 2 (используйте любую из конструкций §4.7 на ваш выбор; используйте (b) без доказательства).

(b) Зацепленность по модулю 2 корректно определена, т.е. не зависит от зейфертовых цепей  $S_1, S_2, S_3$  общего положения.

(c) Зацепленность по модулю 2 «аддитивна» относительно связной суммы трехкомпонентных зацеплений.

**Утверждение 4.10.2.** Изотопные (даже кусочно-линейно сингулярно гомотопные) трехкомпонентные зацепления одновременно зацеплены по модулю 2 или не зацеплены по модулю 2.

Два набора  $S_1$  и  $S_2$  треугольников находятся в общем положении, если контуры треугольников из разных наборов не пересекаются и никакой треугольник одного из них не содержит вершины никакого треугольника из другого. Определим

$$S_1 \cap S_2 := \{\Delta_1 \cap \Delta_2 : \Delta_1 \in S_1, \Delta_2 \in S_2\}.$$

**Задача 4.10.3.** (a) Пересечение двух 2-циклов в общем положении является 1-циклом.

(b) Пусть  $S_1$  и  $S_2$  — множества треугольников в общем положении, для которых  $|S_1| \cap |\partial S_2| = |S_2| \cap |\partial S_1| = \emptyset$ . Тогда  $S_1 \cap S_2$  является 1-циклом.

(c) В п. (b) пересечение  $|S_1| \cap |S_2|$  не обязательно является телом 1-цикла.

(Подсказка: аналогично замечанию 4.8.3.b.)

(d) (загадка) Пусть  $f, g : S^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  являются кусочно-линейными отображениями в общем положении (определите, что это!). Тогда  $f^{-1}(g(S^2))$  является телом 1-цикла в  $S^2$  (определите, что это!).

(По п. (a),  $f(S^2) \cap g(S^2)$  является телом 1-цикла в  $\mathbb{R}^3$ . Обобщение см. [Al22].)

**Утверждение 4.10.4.** *Зацепление  $(a_1, a_2, a_3)$  зацеплено по модулю 2 тогда и только тогда, когда узел  $a_3$  зацеплен по модулю 2 с 1-циклом  $S_1 \cap S_2$  для некоторых (или, что эквивалентно, для любых) зейфертовых цепей  $S_1$  и  $S_2$  в общем положении, для которых  $|S_1| \cap (a_2 \cup a_3) = |S_2| \cap (a_1 \cup a_3) = \emptyset$ .*

*(Такие зейфертовы цепи существуют по лемме 4.9.4. Пересечение  $S_1 \cap S_2$  является 1-циклом по утверждению 4.10.3.b. Зацепленность по модулю 2 для 1-циклов с непересекающимися телами определяется аналогично §4.2.)*

**Утверждение 4.10.5.** *(a) Даны два множества  $M, N$  точек на окружности, в каждом из которых четное число точек. Разобьем точки множества  $M$  на пары. Возьмем некоторые дуги окружности так, что каждая дуга соединяет точки некоторой пары. Множества  $M$  и  $N$  называются зацепленными по модулю 2 на окружности, если количество дуг, содержащих нечетное число точек из  $N$ , нечетно, т.е. сумма  $\sum_a |a \cap N|_2$  по всем дугам  $a$  нечетна. Свойство зацепленности по модулю 2 не зависит от выбора разбиения и дуг.*

*(b) Пусть  $D_1, D_2 \subset \mathbb{R}^3$  — непересекающиеся «вложенные многогранные 2-диски» (например, сингулярные конусы, ограниченные узлами  $a_1, a_2$ ) в общем положении с  $a_3$ , такие что  $a_i = \partial D_i$  для каждого  $i = 1, 2$ . Тогда для каждого  $j = 1, 2$  пересечение  $D_j \cap a_3$  состоит из четного количества точек вне  $D_{3-j}$ . Зацепление  $(a_1, a_2, a_3)$  зацеплено по модулю 2 тогда и только тогда, когда  $D_1 \cap a_3$  и  $D_2 \cap a_3$  зацеплены по модулю 2 в  $a_3$ .*

*Набросок доказательства п. (b). Возьмем зейфертовы цепи  $S_1, S_2$  в общем положении, для которых  $|S_1| \cap (a_2 \cup a_3) = |S_2| \cap (a_1 \cup a_3) = \emptyset$ . Поскольку  $a_1, a_2$  ограничивают  $D_1, D_2$ , то можно выбрать  $S_1, S_2$ , для которых  $S_i \cap D_{3-i} = \emptyset$ . Обозначим через  $C_1$  внутренность по модулю 2 (определение аналогично [Sk18, §2.2]) 2-цикла  $D_1 \cup S_1$ . Тогда возьмем  $C_1 \cap a_3$  в качестве объединения дуг из (a). Применим лемму о четности 4.8.2 к  $a_3$  и  $D_2 \cup S_2$ . Получим, что множества  $D_1 \cap a_3$  и  $D_2 \cap a_3$  зацеплены по модулю 2 в  $a_3$  тогда и только тогда, когда  $|C_1 \cap a_3 \cap D_2|_2 = |a_3 \cap C_1 \cap S_2|_2$  нечетно. Поскольку  $C_1 \cap D_2 = \emptyset$ , ввиду общности положения имеем*

$$\partial(C_1 \cap S_2) = (\partial C_1 \cap S_2) \cup (C_1 \cap \partial S_2) = \partial C_1 \cap S_2 = S_1 \cap S_2.$$

Теперь п. (b) следует из утверждения 4.10.4. Ср. [Ko91, утверждение 3.10]. □

В оставшейся части раздела  $(a_1, a_2, a_3)$  является ориентированным зацеплением с нулевыми попарными коэффициентами зацепления. По лемме 4.9.6 существуют целочисленные зейфертовы цепи  $S_1, S_2, S_3$  узлов  $a_1, a_2, a_3$ , такие что  $|S_i| \cap a_j = \emptyset$  для любых  $i \neq j$ . Более того, можно взять целочисленные зейфертовы цепи в *тройном общем положении* (оно определяется так же, как для зейфертовых цепей по модулю 2). **Тройным коэффициентом зацепления**  $\mu(a_1, a_2, a_3)$  называется сумма знаков тройных точек пересечения:

$$\mu(a_1, a_2, a_3) := \sum_{\Delta_k \in S_k, k=1,2,3, \Delta_1 \cap \Delta_2 \cap \Delta_3 \neq \emptyset} \text{sgn}(\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3) \in \mathbb{Z},$$

где **знаком**  $\text{sgn}(\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3)$  является знак базиса в  $\mathbb{R}^3$ , образованного тремя векторами нормалей к  $\Delta_k$ , согласованных с ориентациями на  $\Delta_k$  по правилу левой руки (левого винта). Это число было введено в 1954-68 гг. Милнором, Хефлигером, Стиром, Масси и, возможно, другими. Приведенное определение следует [Mo08, §9.1].

**Лемма 4.10.6.** *(a) Тройной коэффициент зацепления как-то ориентированных колец Борромео равен  $\pm 1$  (докажите в предположении п. (b)).*

(b) Тройной коэффициент зацепления корректно определен, т.е. не зависит от выбора зейфертовых цепей  $S_1, S_2, S_3$  в общем положении.

(c) Для каждого  $n \in \mathbb{Z}$  существует трехкомпонентное зацепление с тройным коэффициентом зацепления  $n$ .

(d) Тройной коэффициент зацепления аддитивен относительно связной суммы трехкомпонентных зацеплений.

**Утверждение 4.10.7** (о симметрии). (a) При перестановке компонент тройной коэффициент зацепления умножается на знак перестановки.

(b) При изменении ориентации одной из компонент тройной коэффициент зацепления меняет знак.

(c) При зеркальной симметрии тройной коэффициент зацепления меняет знак.

**Утверждение 4.10.8.** Изотопные (даже кусочно-линейно сингулярно гомотопные) трехкомпонентные зацепления имеют равные тройные коэффициенты зацепления.

Оставшиеся задачи этого пункта могут быть непросты для начинающего.

**Задача 4.10.9.** (a) Зацепление  $(a_1, a_2, a_3)$  сингулярно гомотопно тривиальному зацеплению, если  $\mu(a_1, a_2, a_3) = 0$ .

(b) Два ориентированных зацепления  $a_1, a_2, a_3$  и  $b_1, b_2, b_3$  с нулевыми попарными коэффициентами зацепления сингулярно гомотопны, если  $\mu(a_1, a_2, a_3) = \mu(b_1, b_2, b_3)$ .

(Используйте, что «конкордантность влечет сингулярную гомотопность для зацеплений».)

**Задача 4.10.10** (о высшем коэффициенте зацепления). (Вы можете начать изучение этого материала с его аналога по модулю 2.) Пусть  $(a, b)$  является ориентированным двухкомпонентным зацеплением, для которого  $\text{lk}(a, b) = 0$ . По утверждению 4.9.5.b, существуют целочисленные зейфертовы цепи  $S_a$  узла  $a$  и  $S_b$  узла  $b$ , для которых  $|S_a| \cap b = \emptyset = a \cap |S_b|$ . Можем считать, что  $S_a$  и  $S_b$  находятся в общем положении. Тогда аналогично задаче 4.10.3.b пересечение  $S_a \cap S_b$  является целочисленным 1-циклом. Каждый ориентированный отрезок  $MN$  целочисленного 1-цикла  $S_a \cap S_b$  содержится в треугольнике  $\Delta_{MN}$  из  $S_a$ . Перенесем  $MN$  на маленький вектор, касательный к  $\Delta_{MN}$  и образующий вместе с  $MN$  положительный базис в  $\Delta_{MN}$ . Эти маленькие векторы можно выбрать так, чтобы после всех переносов получился целочисленный 1-цикл  $s'$ . Определим число Сато–Левина как  $\text{lk}(S_a \cap S_b, s')$ .

(a) Число Сато–Левина корректно определено, т.е. не зависит от целочисленных зейфертовых цепей  $S_a$  и  $S_b$  общего положения, а также от достаточно малого сдвига  $S_a \cap S_b$  вдоль  $S_a$ .

(b) Найдите числа Сато–Левина зацепления на рис. 4.2.2.w, а также последних двух зацеплений на рис. 4.2.1 (возьмите ориентацию на ваш выбор).

(c) Для каждого четного  $n$  существует зацепление с числом Сато–Левина, равным  $n$ .

(d) Как при перестановке компонент меняется число Сато–Левина?

(e) Как при изменении ориентации одной из компонент меняется число Сато–Левина?

(f) Как при зеркальной симметрии меняется число Сато–Левина?

(g) Изотопные зацепления имеют одинаковые числа Сато–Левина (это неверно для сингулярно гомотопных зацеплений).

(h) Верно ли, что число Сато–Левина зацепления  $(a_1, a_2 \# a_3)$  равно  $\pm 2\mu(a_1, a_2, a_3)$ ?

## 4.11 Почти изотопность вложений графа в пространство

There are knotted closed curves in 3-space (Figure 4.11.1).

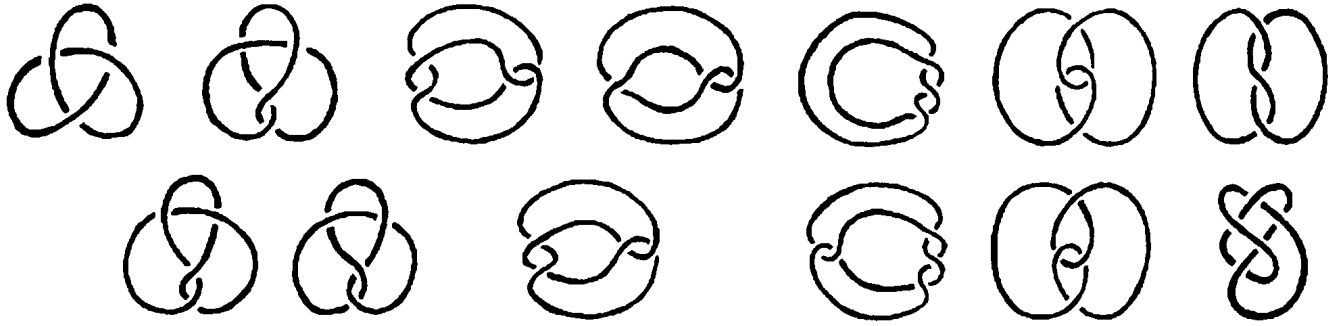


Рис. 4.11.1: Узлы, изотопные трилистнику (верхний ряд) и восьмерке (нижний ряд)

In this subsection  $K$  is any graph.

Два вложения  $f, g : K \rightarrow \mathbb{R}^3$  в пространство называются **ИЗОТОПНЫМИ**, если одно можно непрерывно продеформировать в другое так, чтобы в процессе деформации отображение оставалось вложением. Вот строгая формулировка этого условия: существует семейство вложений  $f_t : K \rightarrow \mathbb{R}^3$ , непрерывно зависящее от параметра  $t \in [0, 1]$ , для которого  $f_0 = f$  и  $f_1 = g$ .

**Theorem.** *There are non-isotopic embeddings  $K_3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  of the 3-cycle  $K_3$ .*

Isotopy classification of embeddings  $K_3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  is so hard that it is unlikely to be obtained.

Обозначим через

- $[n]$  множество  $\{1, 2, \dots, n\}$ ;
- $K_n$  полный граф на множестве  $[n]$  вершин;
- $K_{m,n}$  полный двудольный граф с долями  $[m]$  и  $[n]'$  (мы обозначаем через  $A'$  копию множества  $A$ ).

Embeddings of  $K_5$  and  $K_{3,3}$  in 3-space are shown in Figure 1.0.1.

**Observation.** *Suppose that  $C$  is a simple cycle in  $K$ . If embeddings of  $K$  to  $\mathbb{R}^3$  are isotopic, then their restrictions to  $C$  are isotopic.*

So isotopy classification of embeddings  $K \rightarrow \mathbb{R}^3$  is unlikely to be obtained (although connected sum with non-isotopic knots can yield isotopic embeddings).

It is ‘in the air’ to define and classify ‘embeddings modulo knots’, cf. §4.6. For higher dimensions, see [CS16o] and the references therein.

Отображение графа в пространство называется **ПОЧТИ ВЛОЖЕНИЕМ**, если образы несмежных ребер не пересекаются. (В рамках рассматриваемой ниже задачи, это определение эквивалентно общепринятому, приведенному в Remark 6.10.3.a и в [ABM+, §4].)

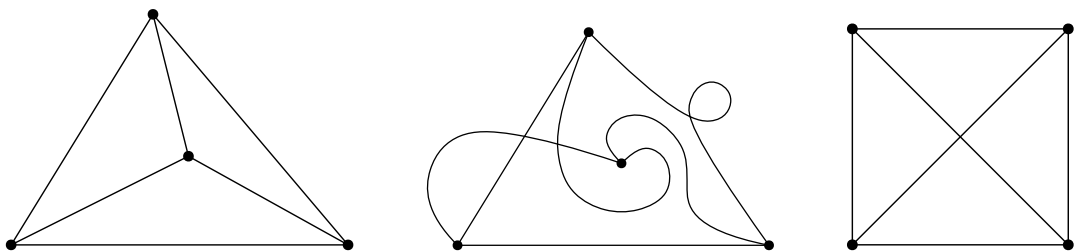


Рис. 4.11.2: Вложение, почти вложение и отображение (изображение), которое не является почти вложением

Определение **ПОЧТИ ИЗОТОПНОСТИ** вложений получается из определения изотопности вложений заменой «оставалось вложением» на «оставалось почти вложением» (или «семейство вложений» на «семейство почти вложений»).

**Observation.** Any two embeddings  $K_3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  are almost isotopic.

**Гипотеза 4.11.1** (first parts are not hard). (a) Any two embeddings  $K_4 \rightarrow \mathbb{R}^3$  are almost isotopic.

(b) There are non-almost-isotopic embeddings  $K_3 \sqcup K_3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ .

Hint. As an example one can take the standard and the Hopf links (Figure 4.2.1). They are distinguished by the integer linking number defined in §4 above. Such an invariant is trivial for embeddings of  $K_n$  when  $n \leq 5$ .

(b') Two embeddings  $K_3 \sqcup K_3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  are almost isotopic if and only if their linking numbers are equal.

(c) There are non-almost-isotopic embeddings  $K_5 \rightarrow \mathbb{R}^3$ .

Hint. They are distinguished by the integer Wu number defined analogously to §1.4, §1.5.4.

(c') Two embeddings  $K_5 \rightarrow \mathbb{R}^3$  are almost isotopic if and only if their Wu numbers are equal.

(d, d') Prove the analogues of (c, c') for  $K_{3,3}$  (and bipartite Wu number defined analogously to §1.4, §1.5.4.).

(e) Two embeddings  $f, g : K_6 \rightarrow \mathbb{R}^3$  are almost isotopic if and only if the linking numbers, the Wu numbers, and the bipartite Wu numbers (of the restrictions of  $f, g$ ) are equal.

(f) Find collections of integers realizable as sets of linking numbers, Wu numbers, and bipartite Wu numbers of an embedding  $K_6 \rightarrow \mathbb{R}^3$ .

(e', f') Find and prove the analogues of (d, e) for  $K_7$  and  $K_8$ .

(g) There are non-almost-isotopic embeddings  $K_3 \sqcup K_3 \sqcup K_3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  whose restrictions to any pair are isotopic.

Hint. So the invariants of (e', f') are incomplete for  $K_9$ . As an example one can take the standard and the Borromean links (Figure 4.2.2.b). They are distinguished by the integer triple linking number defined in §4.10. Such an invariant is trivial for embeddings of  $K_n$  when  $n \leq 8$ .

Almost isotopy classification of embeddings  $K \rightarrow \mathbb{R}^3$  leads one to calculation of the homology group  $H_2^{\text{sym}}(\tilde{K}; \mathbb{Z})$  of certain configuration space  $\tilde{K}$  constructed from  $K$  [Ni00].

If the Wu invariants of embeddings  $K \rightarrow \mathbb{R}^3$  are equal, then the embeddings are *homologous* (in the definition of a concordance allow to change open 2-disks in  $K \times I$  by connected sum with tori) [Ta95]. The Wu invariants of embeddings  $K \rightarrow \mathbb{R}^3$  of a graph  $K$  are equal iff they are equal on every subgraph of  $X$  homeomorphic to  $K_5, K_{3,3}$  or  $K_3 \sqcup K_3$  [ST03] (see also [Ta95, 5.2]).

## 5 Зацепленность в четырехмерном пространстве

### 5.1 Как работать с четырехмерным пространством?

**Задача 5.1.1.** Сколько точек может быть в пересечении прямой и плоскости в трехмерном пространстве?

**Задача 5.1.2.** Сколько решений может быть у системы линейных уравнений  
(а)  $2 \times 2$ ; (б)  $2 \times 3$  (2 уравнения, 3 переменных); (с)  $3 \times 2$ ?

Определим

- *прямую* как множество действительных чисел;
- *плоскость*  $\mathbb{R}^2$  как множество всех упорядоченных пар  $(x, y)$  действительных чисел;
- (*трехмерное*) *пространство*  $\mathbb{R}^3$  как множество всех упорядоченных троек  $(x, y, z)$  действительных чисел;

- *четырёхмерное пространство*  $\mathbb{R}^4$  как множество всех упорядоченных четверок  $(x, y, z, t)$  действительных чисел.

Определение  $d$ -мерного пространства  $\mathbb{R}^d$  для  $d > 4$  дается аналогично.

**Напутствие.** В планиметрии и стереометрии обычно только простейшие свойства выводятся из аналитических определений (или же принимаются за аксиомы). Более сложные свойства могут быть выведены из простейших «синтетически» (т.е. как в школьной геометрии, без использования аналитических определений). Часто бывает удобно свести двумерную задачу к одномерной (т.е. к задаче на прямой), а трехмерную задачу – к двумерной. Аналогично, удачный подход к четырехмерным задачам — это аналогия с трехмерными задачами или сведение к ним.

Для точек  $A = (x_1, y_1, z_1, t_1), B = (x_2, y_2, z_2, t_2) \in \mathbb{R}^4$  и числа  $\lambda \in \mathbb{R}$  обозначим

$$\lambda A := (\lambda x_1, \lambda y_1, \lambda z_1, \lambda t_1) \quad \text{и} \quad A + B := (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2, t_1 + t_2).$$

**Задача 5.1.3.** Разбивает ли двумерная плоскость четырехмерное пространство на куски? Т.е. для любых ли двух точек, не лежащих в двумерной плоскости  $x = y = 0$  четырехмерного пространства  $(x, y, z, t)$ , существует ломаная, соединяющая эти точки и не пересекающая плоскость?

Для точек  $A, B \in \mathbb{R}^4$  отрезком  $AB$  называется множество  $\{\lambda A + (1 - \lambda)B : \lambda \in [0, 1]\}$ . Ломаной  $A_1 A_2 \dots A_n$  называется объединение отрезков  $A_i A_{i+1}$  по всем  $i = 1, 2, \dots, n - 1$ .

*Указание.* Для точек  $A = (x_0, y_0, z_0, t_0)$  и  $B$ , не лежащих на плоскости  $x = y = 0$ , определим точки

$$A_x = A + (1, 0, 0, 0) = (x_0 + 1, y_0, z_0, t_0) \quad \text{и} \quad A_y = A + (0, 1, 0, 0) = (x_0, y_0 + 1, z_0, t_0).$$

Докажите, что хотя бы одна из ломаных  $AB$ ,  $AA_x B$  и  $AA_y B$  не пересекает плоскость  $x = y = 0$ .

**Задача 5.1.4.** Чем является пересечение *двумерной сферы*

$$S^2 := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

со следующими множествами:

- (а) прямая  $x = y = 0$ , содержащая центр сферы;
- (б) плоскость  $x = 0$ , содержащая центр сферы;
- (с) пересечение неотрицательного октанта в  $\mathbb{R}^3$  и объединения двумерных координатных плоскостей, то есть множество

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0 \text{ и } xyz = 0\}.$$

**Задача 5.1.5.** Чем является пересечение *трехмерной сферы*

$$S^3 := \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 1\}$$

со следующими множествами:

- (а) прямая  $x = y = z = 0$ , содержащая центр сферы;
- (б) плоскость  $x = y = 0$ , содержащая центр сферы;
- (с) (трехмерная) гиперплоскость  $x = 0$ , содержащая центр сферы;
- (д) пересечение неотрицательной «одной шестнадцатой»  $\mathbb{R}^4$  и объединения двумерных координатных плоскостей, то есть множество

$$\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 :$$

$x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, t \geq 0$  и хотя бы два из четырех чисел  $x, y, z, t$  равны нулю}.

Подмножество  $L \subset \mathbb{R}^4$  называется **прямой**, если  $L$  не является точкой и найдутся точки  $A, B \in \mathbb{R}^4$ , для которых  $L = \{A + Bt : t \in \mathbb{R}\}$ .

Подмножество  $L \subset \mathbb{R}^4$  называется (двумерной) **плоскостью**, если  $L$  не является ни точкой, ни прямой, и найдутся точки  $A, B, C \in \mathbb{R}^4$ , для которых  $L = \{A + Bt + Cu : t, u \in \mathbb{R}\}$ .

**Задача 5.1.6.** Напишите аналогичное определение (трехмерной) **гиперплоскости** в  $\mathbb{R}^4$ .

В решениях следующих задач вы можете использовать без доказательств результаты задачи 5.1.7, а также все строго сформулированные вами верные факты о решениях систем линейных уравнений.

**Задача 5.1.7.** (а) Подмножество  $L \subset \mathbb{R}^4$  является гиперплоскостью тогда и только тогда, когда  $L \neq \emptyset$ ,  $L \neq \mathbb{R}^4$  и существуют  $a, b, c, d, e \in \mathbb{R}$ , для которых

$$L = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : ax + by + cz + dt = e\}.$$

(б) Подмножество  $L \subset \mathbb{R}^4$  является плоскостью тогда и только тогда, когда  $L \neq \emptyset$ ,  $L \neq \mathbb{R}^4$ ,  $L$  не является гиперплоскостью и существуют  $a_1, b_1, c_1, d_1, e_1, a_2, b_2, c_2, d_2, e_2 \in \mathbb{R}$ , для которых

$$L = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : a_1x + b_1y + c_1z + d_1t = e_1, a_2x + b_2y + c_2z + d_2t = e_2\}.$$

(с) Сформулируйте и докажите аналогичное утверждение для прямой в  $\mathbb{R}^4$ .

**Задача 5.1.8.** Чем может быть пересечение в  $\mathbb{R}^4$ :

- (а) прямой и гиперплоскости? (б) прямой и плоскости?
- (с) плоскости и гиперплоскости? (д) двух гиперплоскостей? (е) двух плоскостей?

*Указание к (а).* Ответ. Пустое множество, точка, прямая.

*Примеры.* Прямая  $x = y = z = 0$  пересекается с гиперплоскостью  $x = 1$  по пустому множеству. Прямая  $x = y = z = 0$  пересекается с гиперплоскостью  $t = 0$  по точке. Прямая  $x = y = z = 0$  пересекается с гиперплоскостью  $x = 0$  по прямой.

*Доказательство того, что другие пересечения невозможны.* Достаточно доказать, что если пересечение в  $\mathbb{R}^4$  прямой  $l$  и гиперплоскости содержит хотя бы две точки, то пересечение совпадает с прямой  $l$ . Это верно, так как для любых двух точек существует единственная прямая, содержащая обе эти точки. Последний факт легко выводится из определения прямой. (Во многих других изложениях этот факт принимается за аксиому.)



**Задача 5.1.9.** Для различных точек  $X, Y \in \mathbb{R}^4$  определим *прямую*  $XY$  как  $\{X + (Y - X)t = (1 - t)X + tY : t \in \mathbb{R}\}$ . Для точек  $X, Y, Z \in \mathbb{R}^4$ , не лежащих на одной прямой, определим *плоскость*  $XYZ$  как

$$\{X + (Y - X)t + (Z - X)u = (1 - t - u)X + tY + uZ : t, u \in \mathbb{R}\}.$$

Никакие пять из восьми точек  $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$  в  $\mathbb{R}^4$  не лежат на одной гиперплоскости. Чем может быть пересечение:

- (b) прямой 12 и плоскости 567?    (d) гиперплоскостей 1234 и 5678?  
 (e) плоскостей 123 и 567?

**Ответы.**

**5.1.1.** 0, если прямая и плоскость параллельны; 1, если прямая пересекает плоскость;  $\infty$ , если прямая лежит в плоскости.

- 5.1.4.** (a) Пара точек  $(0, 0, 1)$  и  $(0, 0, -1)$ .    (b) Окружность  $\begin{cases} x = 0, \\ y^2 + z^2 = 1 \end{cases}$ .

(c) Объединение четвертей трех окружностей:

$$\begin{cases} x = 0, y \geq 0, z \geq 0 \\ y^2 + z^2 = 1 \end{cases}, \quad \begin{cases} y = 0, x \geq 0, z \geq 0 \\ x^2 + z^2 = 1 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} z = 0, x \geq 0, y \geq 0 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}.$$

**5.1.5.** (a) Пара точек  $(0, 0, 0, 1)$  и  $(0, 0, 0, -1)$ .

- (b) Окружность  $\begin{cases} x = y = 0 \\ z^2 + t^2 = 1 \end{cases}$ .    (c) Сфера  $\begin{cases} x = 0 \\ y^2 + z^2 + t^2 = 1 \end{cases}$ .

(d) Граф  $K_4$ , образованный объединением четвертей шести окружностей, одна из которых —  $\begin{cases} x = y = 0, z \geq 0, t \geq 0 \\ z^2 + t^2 = 1 \end{cases}$ .

**5.1.8.** (b) Пустое множество, точка (если прямая пересекает плоскость), прямая (если прямая содержится в плоскости).

(c) Пустое множество, прямая (если плоскость пересекает гиперплоскость), плоскость (если плоскость содержится в гиперплоскости).

(d) Пустое множество, плоскость (если гиперплоскости пересекаются), гиперплоскость (если гиперплоскости совпадают).

(e) Пустое множество, точка или прямая (если плоскости пересекаются), плоскость (если плоскости совпадают).

**5.1.9.** (b) Пустое множество.    (d) Плоскость или пустое множество.

(e) Точка или пустое множество.

## 5.2 Зацепленность симплексов

Если никакие пять из шести вершин двух треугольников в  $\mathbb{R}^4$  не лежат в одной (трехмерной) гиперплоскости, то контур первого не пересекает второй (это следует из ответа к задаче 5.1.9.a).

Определения конуса и сингулярного конуса приведены в замечании 4.2.8.

**Лемма 5.2.1.** Если контуры двух треугольников в  $\mathbb{R}^4$  не пересекаются, то конус с некоторой вершиной над одним из контуров не пересекает другой контур.

Это означает, что треугольники в  $\mathbb{R}^4$  «не зацеплены».

Треугольник и тетраэдр в  $\mathbb{R}^4$ , никакие пять из семи вершин которых не лежат в одной гиперплоскости, называются *зацепленными*, если треугольник пересекает поверхность тетраэдра ровно в одной точке.

**Пример 5.2.2.** *Существуют зацепленные треугольник и тетраэдр в  $\mathbb{R}^4$ , никакие пять из семи вершин которых не лежат в одной гиперплоскости.*

*Подсказка.* Используйте понижение размерности или [Sk16h, Example 2.1].

**Задача 5.2.3** (ср. утверждение 4.1.1). Обозначим через  $\Delta$  и  $\tau$  выпуклые оболочки треугольника и тетраэдра в  $\mathbb{R}^4$ . Если  $\partial\Delta \cap \partial\tau = \emptyset$ , то следующие условия равносильны:

- (1)  $\Delta \cap \partial\tau \neq \emptyset \neq \partial\Delta \cap \tau$ ;
- (2) пересечение  $\Delta \cap \tau$  есть отрезок, один конец которого лежит на контуре треугольника, а другой — на поверхности тетраэдра;
- (3) пересечение  $\partial\Delta \cap \tau$  есть одна точка, и два отрезка контура  $\partial\Delta$ , выходящие из этой точки, находятся по разные стороны от гиперплоскости тетраэдра  $\tau$ ;
- (3') пересечение  $\Delta \cap \partial\tau$  есть одна точка, и маленькую трехмерную сферу с центром в этой точке  $\Delta$  и  $\partial\tau$  пересекают по замкнутым ломаным, *зацепленным* в этой сфере;
- (4) плоскость треугольника пересекает  $\tau$  по отрезку, один конец которого лежит в  $\Delta$ , а другой — нет;
- (4') гиперплоскость тетраэдра пересекает  $\Delta$  по отрезку, один конец которого лежит в  $\tau$ , а другой — нет;
- (5) прямая пересечения плоскости треугольника и гиперплоскости тетраэдра пересекает каждый из них по паре точек, и эти пары чередуются на прямой.

**Задача 5.2.4.** Возьмем любые семь точек в четырехмерном пространстве, никакие пять из которых не лежат в одной гиперплоскости, а также треугольник  $T$ , вершинами которого являются три из них.

(а) Пусть никакие два треугольника, образованные точками из семи данных, отличные от  $T$  и не имеющие общих вершин, не пересекаются (ср. Example 6.2.1.f). Тогда  $T$  зацеплен с тетраэдром, образованным оставшимися четырьмя из семи точек.

(b),(c),(d) Попробуйте догадаться до утверждений, аналогичных п. (а) и задаче 4.1.5!

*Подсказка.* Утверждения (a),(b),(c),(d) следуют из количественной линейной теоремы ван Кампена–Флореса [Sk14, теорема 1.5], which is a ‘linear’ analogue of Lemma 6.7.3. Ср. Assertions 1.7.1 и 1.7.2.

*Зацеплением* симплексов (возможно, имеющих разные размерности) в  $\mathbb{R}^d$  называется набор невырожденных симплексов в  $\mathbb{R}^d$ , границы которых попарно не пересекаются. *Тривиальность* зацепления симплексов определяется аналогично случаю треугольников в пространстве (§4.4).

Пусть  $(\Delta, Z * \delta)$  — зацепление двух симплексов, а  $Z'$  — точка вне гиперплоскости симплекса  $\delta$ , для которой  $\partial\Delta$  не пересекает ни одного из отрезков, соединяющих некоторую точку отрезка  $ZZ'$  с некоторой точкой границы  $\partial\delta$ . Тогда *элементарной комбинаторной изотопией* назовем замену  $Z * \delta$  на  $Z' * \delta$ . *Элементарной комбинаторной изотопией* назовем также аналогичное преобразование первого симплекса при неизменном втором. Два зацепления симплексов назовем *комбинаторно изотопными*, если их можно соединить последовательностью зацеплений симплексов, в которой соседние получаются друг из друга элементарной комбинаторной изотопией.

По лемме 5.2.1 любое зацепление двух треугольников в  $\mathbb{R}^4$  комбинаторно изотопно тривиальному. То же справедливо для зацепления любого количества треугольников.

**Задача 5.2.5.** (а) Комбинаторно изотопные зацепления треугольника и тетраэдра в  $\mathbb{R}^4$  одновременно зацеплены или не зацеплены.

(b) Если треугольник и тетраэдр в  $\mathbb{R}^4$  не зацеплены, то образованное ими зацепление комбинаторно изотопно тривиальному зацеплению.

П. (а) означает, что существуют два зацепления треугольника и тетраэдра в  $\mathbb{R}^4$ , не

являющиеся комбинаторно изотопными: тривиальное и пара из зацепленных треугольника и тетраэдра.

**Гипотеза 5.2.6** (ср. утверждение 4.5.1.c). *Любые две пары зацепленных треугольника и тетраэдра в  $\mathbb{R}^4$  комбинаторно изотопны.*

Гипотеза 5.2.6 означает, что существуют два зацепления треугольника и тетраэдра в  $\mathbb{R}^4$  (тривиальное и зацепление из примера 5.2.2), для которых любое такое зацепление комбинаторно изотопно одному из них. Ввиду утверждения 5.2.5.a эти два зацепления не являются комбинаторно изотопными. Гипотеза 5.2.6 также означает, что треугольник и тетраэдр в  $\mathbb{R}^4$  зацеплены тогда и только тогда, когда они зацеплены по модулю 2 (см. следующий пункт).

По-видимому, доказательство гипотез 5.2.6 и 5.2.8 несложно вытекает из свойства 5.2.3.(2) и его многомерного аналога.

**Утверждение 5.2.7.** (a) *Если  $d \geq k+l$  и поверхности  $k$ -мерного и  $l$ -мерного симплексов в  $\mathbb{R}^d$  не пересекаются, то конус с некоторой вершиной над одной из поверхностей не пересекает другую поверхность.*

(b) *При любых  $k, l$  существует зацепление  $k$ -мерного и  $l$ -мерного симплексов в  $\mathbb{R}^{k+l-1}$ , не являющееся комбинаторно изотопным тривиальному.*

(c) *Если  $k, l < d < k+l-1$ , то любое зацепление  $k$ -мерного и  $l$ -мерного симплексов в  $\mathbb{R}^d$  комбинаторно изотопно тривиальному.*

П. (a) означает, что любое зацепление  $k$ -мерного и  $l$ -мерного симплексов в  $\mathbb{R}^d$  комбинаторно изотопно тривиальному.

**Гипотеза 5.2.8.** *При любых  $k, l$  существуют два зацепления  $k$ -мерного и  $l$ -мерного симплексов в  $\mathbb{R}^{k+l-1}$ , для которых любое зацепление таких симплексов комбинаторно изотопно одному из них.*

### 5.3 Зацепленность ломаных и двумерных «многогранников»

**Лемма 5.3.1** (ср. лемму 5.2.1). (a) *Для любых двух замкнутых непересекающихся ломаных в  $\mathbb{R}^4$  некоторый сингулярный конус над одной из них не пересекает другую.*

(b) *Для любой замкнутой несамопересекающейся ломаной в  $\mathbb{R}^4$  некоторый сингулярный конус над ней является конусом.*

(c) *Для любых двух замкнутых непересекающихся несамопересекающихся ломаных в  $\mathbb{R}^4$  некоторый сингулярный конус над одной из них не пересекает другую и является конусом.*

*Подсказка к п. (b).* Для каждой пары различных отрезков возьмите аффинное подпространство (т.е. гиперплоскость, плоскость или прямую), натянутое на эту пару. Возьмите точку в  $\mathbb{R}^4$ , лежащую вне объединения таких подпространств.

Одномерные узлы и зацепления в  $\mathbb{R}^d$ , а также их тривиальность и изотопность, определяются аналогично случаю  $d = 3$  (§4.4, ср. определения в п. 1.6, [Is]). Леммы 5.3.1.bc показывают, что

- любой узел в  $\mathbb{R}^4$  изотопен контуру треугольника;
- любое двухкомпонентное зацепление в  $\mathbb{R}^4$  изотопно тривиальному.

Аналоги этих лемм и утверждений справедливы для зацеплений из любого количества компонент, для ориентированных зацеплений, а также в  $\mathbb{R}^d$  при любом  $d > 3$ .

Определения 1-цикла и 2-цикла (по модулю 2 и целочисленных) в  $\mathbb{R}^4$ , а также их тел, аналогичны случаю плоскости и пространства, см. замечание 1.3.6 и §4.8.

Определение *зацепленности по модулю 2* для 1-цикла и 2-цикла по модулю 2 в  $\mathbb{R}^4$  с непересекающимися телами аналогично определению из п. 4.2. Ввиду примера 5.2.2 существуют 1-цикл и 2-цикл по модулю 2 в  $\mathbb{R}^4$ , зацепленные по модулю 2.

**Задача 5.3.2** (загадка). Придумайте и докажите (или опровергните) аналоги лемм 4.2.2.ab и 4.2.4.ab для 1-цикла и 2-цикла по модулю 2 в  $\mathbb{R}^4$ . (По поводу аналога теоремы 4.2.9.a см. [Sk14, §2.6] и [St24].)

Для задачи 5.3.2 нужна лемма о четности 5.3.4.c. Начнем с яркого частного случая.

**Задача 5.3.3** (ср. с утверждениями 1.3.5.a и 4.8.5). В  $\mathbb{R}^4$  имеется 16 точек: 8 красных и 8 желтых. Никакие пять из них не лежат в одной гиперплоскости. Тогда количество пар  $(\Delta, \Delta')$  пересекающихся красных (т.е. натянутых на красные точки) треугольников  $\Delta$  и желтых треугольников  $\Delta'$  четно.

Два набора треугольников в  $\mathbb{R}^4$  *находятся в общем положении*, если никакой треугольник одного из них не пересекает контур никакого треугольника из другого.

**Лемма 5.3.4** (о четности; ср. леммы о четности 1.3.3 и 4.2.5, 4.8.2). (a) Если никакие пять из восьми вершин двух тетраэдров в  $\mathbb{R}^4$  не лежат в одной гиперплоскости, то поверхности этих тетраэдров пересекаются в четном числе точек.

(b) Если среди вершин двух 2-циклов по модулю 2 в  $\mathbb{R}^4$  никакие пять не лежат в одной гиперплоскости и никакие три треугольника, натянутые на эти вершины, не имеют общей внутренней точки, то тела этих 2-циклов пересекаются в четном числе точек.

(c) Если два 2-цикла по модулю 2 в  $\mathbb{R}^4$  находятся в общем положении, то количество пар  $(\Delta, \Delta')$  пересекающихся треугольников  $\Delta$  и  $\Delta'$  соответственно первого и второго 2-цикла, четно.

*Указание.* Доказательство аналогично доказательству леммы о четности 4.8.2. Для п. (a) рассмотрите пересечение выпуклых оболочек тетраэдров. Альтернативно, возьмите сечение гиперплоскостью одного из тетраэдров; проверьте общее положение перед использованием леммы о четности 1.3.3.

Пара треугольников в  $\mathbb{R}^4$  называется *трансверсальной*, если базис  $e_1, e_2$  плоскости первого треугольника вместе с базисом  $f_1, f_2$  плоскости второго треугольника образуют базис  $e_1, e_2, f_1, f_2$  пространства  $\mathbb{R}^4$ . Знаком  $\text{sgn } X$  точки пересечения  $X$  трансверсальной пары ориентированных треугольников в  $\mathbb{R}^4$  называется число  $+1$ , если положительный базис  $e_1, e_2$  первого треугольника вместе с положительным базисом  $f_1, f_2$  второго треугольника образуют положительный базис  $e_1, e_2, f_1, f_2$  пространства  $\mathbb{R}^4$ , и число  $-1$  в противном случае.

**Задача 5.3.5.** Знак точки пересечения трансверсальной пары ориентированных треугольников в  $\mathbb{R}^4$  не меняется при перестановке треугольников в паре (ср. утверждение 1.5.9.a).

**Задача 5.3.6.** Определение *коэффициента зацепления* для целочисленных 1-цикла и 2-цикла в  $\mathbb{R}^4$  с непересекающимися телами аналогично определению из п. 4.3.

(a) Для любого  $n \in \mathbb{Z}$  существуют целочисленные 1-цикл и 2-цикл в  $\mathbb{R}^4$ , коэффициент зацепления которых равен  $n$ .

(b) (загадка) Аналоги каких утверждений п. 4.3 верны для целочисленных 1-цикла и 2-цикла в  $\mathbb{R}^4$ ?

**Лемма 5.3.7** (о тривиальности). Если два целочисленных 2-цикла в  $\mathbb{R}^4$  находятся в общем положении, то сумма знаков точек пересечения по всем парам  $(\Delta, \Delta')$  пересекающихся треугольников соответственно первого и второго 2-цикла, равна нулю.

**Пример 5.3.8** (ср. пример 4.4.5). Рассмотрим зацепление Уайтхеда в  $\mathbb{R}^3$  (рис. 4.2.2. *w* и предпоследнее зацепление на рис. 4.2.1). Рассмотрим  $\mathbb{R}^3$  как гиперплоскость в  $\mathbb{R}^4$ . Построим объединение двух конусов над его первой компонентой, вершины которых лежат по разные стороны от гиперплоскости. Это объединение и вторая компонента зацепления Уайтхеда образуют зацепленные замкнутую ломаную и «вложенную многогранную двумерную сферу», коэффициент зацепления которых равен нулю (при любой их ориентации).

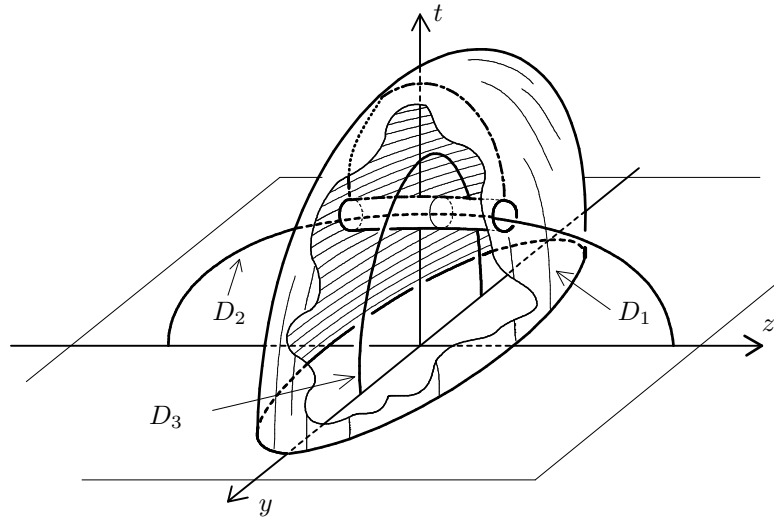


Рис. 5.3.1: Три полуэллипсоида  $D_1, D_2, D_3$  в  $\mathbb{R}_+^4$ , ограниченные кольцами Борромео. Изображено сечение гиперплоскостью  $x = 0$ . Кольца Борромео пересекают гиперплоскость по двум парам точек (одна на оси  $y$ , другая на оси  $z$ ) и эллипсу (в плоскости  $yz$ ). Полуэллипсоиды пересекают гиперплоскость по двум полуэллипсам и полуэллипсоиду. Показано, как полуэллипсоид  $D_1$  превратить приклеиванием ручки в тор с вырезанным диском.

**Пример 5.3.9.** Рассмотрим кольца Борромео в  $\mathbb{R}^3$  (пример 4.7.1. *a*), заданные уравнениями. Рассмотрим  $\mathbb{R}^3$  как гиперплоскость  $t = 0$  в  $\mathbb{R}^4$ . Возьмем двумерные эллипсоиды в  $\mathbb{R}^4$ , заданные уравнениями

$$\begin{cases} y = 0 \\ z^2 + 2x^2 + 2t^2 = 1 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} z = 0 \\ x^2 + 2y^2 + 1.5t^2 = 1 \end{cases} .$$

Эти два эллипсоида вместе с первым кольцом Борромео попарно не пересекаются (ибо на пересечении эллипсоидов имеем  $2x^2 + 2t^2 = 1 = x^2 + 1.5t^2$ ; рис. 5.3.1). Из них любые два объекта без третьего «не зацеплены» (т.е. один эллипсоид ограничивает трехмерный «шар», не пересекающий другой эллипсоид, и не пересекает некоторый двумерный «диск», ограниченный первым кольцом Борромео). Все три объекта вместе зацеплены (т.е. изотопны объединению объектов, лежащих в непересекающихся шарах).

В высших размерностях существуют заузленные сферы и зацепления из сфер — в частности, «сферы Борромео», аналогичные примерам 4.7.1. *a* и 5.3.9. О классификации многомерных узлов и зацеплений см. пример 6.14.5, [Sk06, §3], [Sk16h, Sk16s].

## 5.4 Коэффициенты зацепления как пересечения в $\mathbb{R}^4$

Обозначим через

$$\mathbb{R}_+^4 := \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : t \geq 0\}$$

четырёхмерное полупространство.

Аналогично случаю трёхмерного пространства (п. 4.8) определяются

- общность положения двух наборов треугольников в  $\mathbb{R}^4$ ;
- алгебраическое число пересечений  $A \cdot B$  двух наборов  $A, B$  треугольников в  $\mathbb{R}^4$ , находящихся в общем положении.

**Лемма 5.4.1.** Пусть компоненты  $a, b$  зацепления в  $\mathbb{R}^3$  ограничивают зейфертовы цепи  $A, B$  общего положения в  $\mathbb{R}^4_+$ .

(a) Зацепление зацеплено по модулю 2 тогда и только тогда, когда  $|A \cap B|$  чётно.

(b) Если  $a, A$  и  $b, B$  ориентированы согласованно, то  $\text{lk}(a, b) = A \cdot B$ .

В частности, если зейфертовы цепи не пересекаются, то ломаные имеют нулевой коэффициент зацепления.

Набросок доказательства п. (b). Обозначим через  $A' \subset \mathbb{R}^4_+$  ориентированный диск (например, конус), ограниченный ломаной  $a$ . Обозначим через  $B' \subset \mathbb{R}^3$  целочисленную зейфертову цепь ломаной  $b$ , находящуюся в общем положении с  $a$ . Имеем

$$A' \cap (B \cup |B'|) = \emptyset, \quad \text{поэтому} \quad (A \cup A') \cap (B \cup |B'|) = (A \cap B) \cup (a \cap |B'|).$$

Обозначим теми же буквами целочисленные цепи, носителями которых являются  $a, A, A', B$ . Тогда по лемме о тривиальности 5.3.7

$$\text{lk}(a, b) = a \cdot B' = A \cdot B - (A - A') \cdot (B - B') = A \cdot B.$$

**Пример 5.4.2** (рис. 5.3.1). Существуют полуэллипсоиды  $D_1, D_2, D_3 \subset \mathbb{R}^4_+$  «общего положения», ограниченные кольцами Борромео («зейфертовы»), для которых  $D_1 \cap D_3 = D_2 \cap D_3 = \emptyset$ , а  $D_1 \cap D_2$  является парой точек.

*Построение.* Возьмем полуэллипсоиды  $D_1, D_2, D_3 \subset \mathbb{R}^4_+$ , заданные уравнениями

$$\begin{cases} x = 0 \\ y^2 + 2z^2 + t^2 = 1 \end{cases}, \quad \begin{cases} y = 0 \\ z^2 + 2x^2 + 2t^2 = 1 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} z = 0 \\ x^2 + 2y^2 + 1.5t^2 = 1 \end{cases}$$

соответственно. Эти полуэллипсоиды ограничены кольцами Борромео. На пересечении  $D_1 \cap D_3$  имеем  $y^2 + t^2 = 2y^2 + 1.5t^2 = 1$ , следовательно,  $D_1 \cap D_3 = \emptyset$ . Аналогично  $D_2 \cap D_3 = \emptyset$ . Множество  $D_1 \cap D_2$  является парой точек  $(0, 0, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}), (0, 0, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$ .

(Превратив полуэллипсоид  $D_1$  в проколотый тор приклеиванием ручки, см. рис. 5.3.1, получим попарно непересекающиеся зейфертовы цепи в  $\mathbb{R}^4_+$ , ограниченные кольцами Борромео.)  $\square$

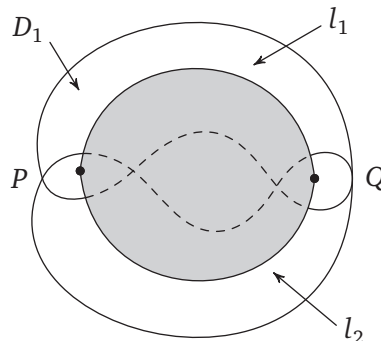


Рис. 5.4.1: Диск Уитни

Пусть  $P$  и  $Q$  являются точками пересечения внутренностей кусочно-линейно вложенных 2-дисков  $D_1, D_2 \subset \mathbb{R}^4$  в общем положении. Соединим  $P$  и  $Q$  дугами  $l_1 \subset D_1$  и  $l_2 \subset D_2$ , не содержащими точек пересечения, отличных от  $D_1$  и  $D_2$  (рис. 5.4.1). Диск Уитни (черный на рис. 5.4.1) — вложенный в  $\mathbb{R}^4$  2-диск общего положения, границей которого является  $l_1 \cup l_2$ . Такой диск существует по лемме 5.3.1.b.

**Пример 5.4.3.** Для двух точек пересечения  $D_1 \cap D_2$  из построения примера 5.4.2 существует диск Уитни, пересекающий  $D_3$  ровно в одной точке.

*Построение.* Используем диски из построения примера 5.4.2. Пара точек  $D_1 \cap D_2$  ограничивает в  $D_1$  и в  $D_2$  дуги  $l_1$  и  $l_2$ , заданные уравнениями

$$\begin{cases} x = y = 0 \\ z^2 \leq 1/3 \\ 2z^2 + t^2 = 1 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x = y = 0 \\ z^2 \leq 1/3 \\ z^2 + 2t^2 = 1 \end{cases}.$$

Объединение этих дуг ограничивает в  $\mathbb{R}_+^4$  диск (Уитни)  $D$ , заданный уравнениями

$$\begin{cases} x = y = 0 \\ z^2 \leq 1/3 \\ \frac{1-z^2}{2} \leq t^2 \leq 1 - 2z^2 \end{cases}.$$

Легко проверить, что  $D \cap D_3 = \{(0, 0, 0, \sqrt{2/3})\}$ . □

**Лемма 5.4.4.** Пусть  $D_1, D_2, D_3 \subset \mathbb{R}_+^4$ ,  $i = 1, 2, 3$ , являются собственными зейфертовскими дисками общего положения для зацепления  $L := (\partial D_1, \partial D_2, \partial D_3)$ . (Собственные означает  $\text{Int } D_i \cap \mathbb{R}^3 = \emptyset$ .)

(a) (Ср. задачу 4.10.5.) Пусть зацепление  $L$  попарно не зацеплено по модулю 2. Тогда по лемме 5.4.1.a число  $|D_i \cap D_j|$  четно. Поэтому можно разбить точки пересечения  $D_i \cap D_j$  на пары. Возьмем дизъюнктное объединение  $W_{ij}$  дисков Уитни «общего положения», соответствующих этому разбиению. Зацепление зацеплено по модулю 2 тогда и только тогда, когда  $|W_{12} \cap D_3| + |W_{23} \cap D_1| + |W_{31} \cap D_2|$  нечетно.

(b) (Ср. [АК21, определение 3.4].) Пусть попарные коэффициенты зацепления компонент нулевые. Выберем ориентации на дисках и соответствующие ориентации на компонентах зацепления. Тогда  $D_i \cdot D_j = 0$  по лемме 5.4.1.b. Поэтому можно разбить точки пересечения  $D_i \cap D_j$  на пары точек с разными знаками. Возьмем попарно непесекающиеся диски Уитни, соответствующих этому разбиению. Обозначим через  $W_{ij} = W_{(i,j)}$  их объединение (сумму). We may choose Whitney disks so that  $W_{12}, W_{13}, W_{2,3}$  are pairwise disjoint. На каждом диске из  $W_{ij}$  выберем ту ориентацию, которая задает на граничной окружности диска направление от отрицательной точки пересечения к положительной вдоль  $D_i$ , а вдоль  $D_j$  наоборот. Тогда  $\mu(L) = W_{12} \cdot D_3 + W_{23} \cdot D_1 + W_{31} \cdot D_2$ .

*Sketch of a proof of (b).* (I am grateful to T. Garaev for finding a gap in the earlier version of this argument.) Assume that the sublink  $\partial D_1 \sqcup \partial D_2$  is trivial. Then as in the integer analogue of Assertion 4.10.5.b, take disjoint oriented 2-disks  $D'_1, D'_2 \subset \mathbb{R}^3$  spanned by  $\partial D_1, \partial D_2$ . We may assume that  $D'_1, D'_2$  are in general position, so that  $D'_1 \cap \partial D_3$  and  $D'_2 \cap \partial D_3$  are disjoint finite sets of points.

Let  $D''_3 \subset \mathbb{R}_+^4$  be the cone over  $\partial D_3$  whose vertex is far away from  $\mathbb{R}^3 \subset \mathbb{R}_+^4$ , so that the cone is close to the cylinder. For  $j = 1, 2$  we can push the interior of  $D'_j$  slightly to  $\mathbb{R}_+^4$  to obtain proper 2-disk  $D''_j \subset \mathbb{R}_+^4$  such that every intersection point of  $D'_j \cap \partial D_3$  corresponds to an intersection point of  $D''_j \cap D''_3$ . Hence intersection points of  $D''_j \cap D''_3$  can be split into

pairs of the opposite signs. Denote by  $W''_{j,3}$  the union of general position oriented Whitney 2-disks in  $\mathbb{R}^4_-$  corresponding to all such pairs of points.

Then

$$\mu(L) = \text{lk}_{\partial D_3}(D'_1 \cap \partial D_3, D'_2 \cap \partial D_3) = W''_{31} \cdot D''_2 + W''_{32} \cdot D''_1 = W_{12} \cdot D_3 + W_{23} \cdot D_1 + W_{31} \cdot D_2.$$

Here the first equality is the integer analogue of Assertion 4.10.5.b, the second equality is yet to be proved, and the third equality holds by the following Triple Triviality Lemma.  $\square$

**Лемма 5.4.5** (Triple Triviality). *Let  $S_1, S_2, S_3$  be embedded oriented 2-spheres in  $\mathbb{R}^4$  in general position. Define  $W_{12}, W_{13}, W_{23}$  analogously to Lemma 5.4.4.b. Then  $W_{12} \cdot S_3 + W_{23} \cdot S_1 + W_{31} \cdot S_2 = 0$ .*

This is a particular case of [Ma78, Proposition 4] (which has a simple geometric proof). Observe that the analogue of this lemma for spheres with handles instead of spheres is incorrect (this is proved using попарно непересекающиеся зейфертовы поверхности в  $\mathbb{R}^4_+$ , ограниченные кольцами Боррмео, see construction of Example 5.4.2).

**Замечание 5.4.6** (об орнаментах; [AMS+]). Обозначим через  $S = S_1 \sqcup \dots \sqcup S_r$  дизъюнктное объединение  $r$  копий сферы  $S^n$ , а через  $D = D_1 \sqcup \dots \sqcup D_r$  дизъюнктное объединение  $r$  копий диска  $D^{n+1}$ ; размерности объединений  $S, D$  ясны из контекста. Назовем  $r$ -компонентным  $n$ -орнаментом в  $S^d$  кусочно-линейное отображение  $f : S \rightarrow S^d$  общего положения (см. определение в [RS72]), такое что  $fS_1 \cap \dots \cap fS_r = \emptyset$ .

Пусть  $r \geq 2$  и  $f$  является  $r$ -компонентным  $(k(r-1)-1)$ -мерным орнаментом в  $S^{kr-1}$ . Продолжим  $f$  до кусочно-линейного отображения  $g : D \rightarrow B^{kr}$  общего положения (продолжение строится, например, при помощи построения конуса над каждым  $f|_{S_i}$  с вершиной во внутренней точке шара  $B^{kr}$ , причем берется своя вершина для каждой компоненты). Определим коэффициент  $r$ -зацепления по модулю 2 отображения  $f$  как  $\text{lk}_2 f := |gD_1 \cap \dots \cap gD_r|_2 \in \mathbb{Z}_2$ . Это обобщение коэффициента зацепления (он получается для  $r = 2$ , см. лемму 5.4.1) и  $\mu$ -инварианта [FT77] (он получается для  $r = 3$  и  $k = 1$ ).

(a) Тогда  $\text{lk}_2 f$  корректно определен, т.е. не зависит от выбора продолжения  $g$ .

(b) Обозначим  $I := [0, 1]$ . Конкордантностью орнамента является отображение  $F : S \times I \rightarrow S^d \times I$ , такое что

$$F(\cdot, t) \subset S^d \times \{t\} \quad \text{для каждого } t \in \{0, 1\} \quad \text{и} \quad F(S_1 \times I) \cap F(S_2 \times I) \cap \dots \cap F(S_r \times I) = \emptyset.$$

Тогда  $\text{lk}_2 f$  является инвариантом конкордантности орнамента.

(c) Для  $r = 3$  и  $k = 1$  верно ли, что  $\text{lk}_2 f = |fS_1 \cap fS_2 \cap \text{Int}_2 fS_3|_2$ ?

(d) Аналогично определяется коэффициент  $r$ -зацепления  $\text{lk} f \in \mathbb{Z}$  как сумма знаков точек в пересечении  $gD_1 \cap \dots \cap gD_r$ .

Если  $f$  ограничивает отображение  $g : D \rightarrow B^{kr}$ , такое что  $gD_1 \cap \dots \cap gD_r = \emptyset$ , то  $\text{lk} f = 0$ .

Обратное верно для каждого  $k \geq 2$  [AMS+, теорема 1.13.a].

Для  $k = 1$  обратное очевидно при  $r = 2$  и неверно ни для какого  $r \geq 3$  [AMS+, теорема 1.10].

Коэффициент  $r$ -зацепления определяет биекцию между  $\mathbb{Z}$  и множеством классов конкордантности  $r$ -компонентных  $(k(r-1)-1)$ -мерных орнаментов в  $S^{kr-1}$  для каждого  $r, k \geq 2$  [AMS+, теорема 1.13.a].



## 6 Реализуемость гиперграфов и комплексов

### 6.1 Наглядные задачи о склейках в пространстве

В этом пункте треугольник и другие фигуры предполагаются «двумерными и растяжимыми». Для обоснования ответа «можно» достаточно нарисовать понятную картинку, как на рис. 6.1.1 справа. Достаточно нестрогих обоснований ответа «нельзя», а строгие дайте после изучения следующих пунктов, в которых приведена формализация.

**Задача 6.1.1.** Изобразите без самопересечений в трехмерном пространстве  $\mathbb{R}^3$  фигуру, полученную склейкой с указанными направлениями сторон

- (a)  $\overrightarrow{AB}$ ,  $\overrightarrow{AC}$  и  $\overrightarrow{BC}$  треугольника  $ABC$  (шутовской колпак Зимана);
- (b)  $\overrightarrow{AB}$  и  $\overrightarrow{DC}$ ,  $\overrightarrow{BC}$  и  $\overrightarrow{AD}$  квадрата  $ABCD$ .

**Задача 6.1.2.** В  $\mathbb{R}^3$  невозможно изобразить без самопересечений фигуру, полученную склейкой

- (a) сторон  $\overrightarrow{AB}$  и  $\overrightarrow{CD}$ ,  $\overrightarrow{BC}$  и  $\overrightarrow{AD}$  квадрата  $ABCD$  (бутылка Клейна);
- (b) сторон  $\overrightarrow{AB}$  и  $\overrightarrow{CD}$ ,  $\overrightarrow{BC}$  и  $\overrightarrow{DA}$  квадрата  $ABCD$  (проективная плоскость  $\mathbb{R}P^2$ );
- (c) треугольника и ленты Мебиуса так, чтобы контур треугольника приклеился к срединной окружности ленты Мебиуса.

Это доказывается при помощи «неориентируемости» фигур, полученных склейкой, и (для п. (a,b)) трехмерной теоремы Жордана.

Определения симплициальной и PL вложимости (пп. 6.4 и 6.5) позволяют дать строгие формулировки задач 6.1.1.a и 6.1.2.ab:

- некоторый 2-комплекс, представляющий шутовской колпак Зимана, вложим в  $\mathbb{R}^3$ ;
- никакой 2-комплекс, представляющий проективную плоскость или бутылку Клейна, не вложим в  $\mathbb{R}^3$ .

(Оба утверждения верны и для симплициальной, и для PL вложимости.)

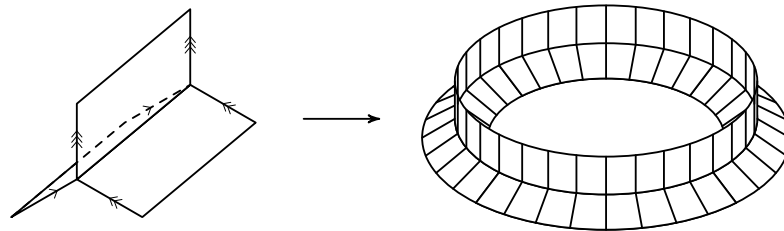


Рис. 6.1.1: Склеивание ребер

Возьмем в  $\mathbb{R}^3$  прямоугольники  $X Y B_k A_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ , любые два из которых пересекаются только по отрезку  $X Y$ . Книжкой с  $n$  листами называется объединение этих прямоугольников. См. рис. 6.1.1 слева для  $n = 3$ . Для перестановки  $\sigma \in S_n$  назовем  $\sigma$ -склейкой склейку, с указанными направлениями, сторон  $\overrightarrow{X A_k}$  и  $\overrightarrow{Y B_{\sigma(k)}}$  книжки с  $n$  листами для каждого  $k = 1, 2, \dots, n$ . См. рис. 6.1.1 для  $n = 3$  и  $\sigma = \text{id}$ .

- Задача 6.1.3.** Можно ли в  $\mathbb{R}^3$  осуществить без самопересечений  $\sigma$ -склейку для
- (3)  $n = 3$ ,  $\sigma = (123)$ ;    (21)  $n = 3$ ,  $\sigma = (12)(3)$ ;    (22)  $n = 4$ ,  $\sigma = (12)(34)$ ;
  - (31)  $n = 4$ ,  $\sigma = (123)(4)$ ;    (211)  $n = 4$ ,  $\sigma = (12)(3)(4)$ ;    (32)  $n = 5$ ,  $\sigma = (123)(45)$ ?

**Задача 6.1.4.** Для каких перестановок  $\sigma$  в  $\mathbb{R}^3$  можно осуществить без самопересечений  $\sigma$ -склейку?

**Задача 6.1.5.** Для каждого ребра  $AB$  некоторого графа возьмем прямоугольник  $AB B' A'$ . Возьмем несвязное объединение таких прямоугольников. (В нем разные ребра  $AA'$  обозначены одинаково.) Докажите, что в  $\mathbb{R}^3$  существует фигура, полученная из

этого объединения склейкой ребер  $\overrightarrow{AA'}$  разных прямоугольников для каждой вершины  $A$  графа. (Строгая формулировка дана в задаче 6.17.6.b.)

**Ответы к 6.1.3.** (3,22) — да, (21, 31, 211, 32) — нет.

**Ответ к 6.1.4.** Для перестановок  $\sigma$ , сопряженных степеням цикла  $(12 \dots n)$ .

## 6.2 Вложенные семейства треугольников

A set of non-degenerate triangles in  $d$ -dimensional Euclidean space  $\mathbb{R}^d$  is **embedded**, if every two of them either are disjoint, or intersect only at a common vertex, or intersect only by a common side.

**Пример 6.2.1.** (a) Clearly, for any 4 points in the plane, the set of all the triangles spanned by them is not embedded.

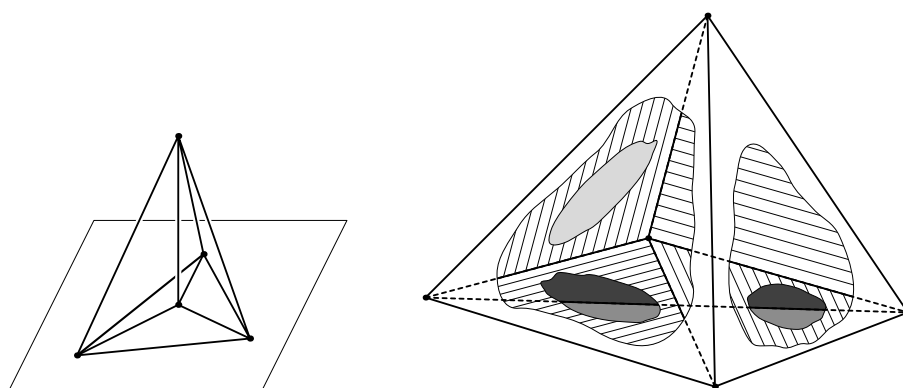


Рис. 6.2.1: Left: The embedded cone.

Right: Realization in  $\mathbb{R}^3$  of the complete two-homogeneous hypergraph on 5 vertices, i.e. of the union of 2-faces of 4-dimensional simplex

(b) In Figure 6.2.1, left, one can see a point  $O$  and 4 points in 3-space such that the set of all the triangles formed by  $O$  and some two of the four points, is embedded.

Clearly, no point  $O$  and 5 points with this property exist [Sk14, Proposition 2.4.a].

(c) In Figure 6.2.1, right, one can see 4 vertices of a tetrahedron and a point inside it. These are 5 points in 3-space such that the set of all triangles with the vertices at these points is embedded.

By (b), no 6 points with this property exist (even there are no 6 points in 3-space such that the set of all but one triangles with the vertices at these points is embedded).

(c') There are 6 points in 3-space such that the set of all but two triangles with the vertices at these points is embedded.

Indeed, take tetrahedron  $ABCD$  together with points  $E$  and  $F$  inside  $ABCD$  close to midpoints of  $AB$  and  $CD$ ; except triangles  $ABF$  and  $CDE$ .

(c'') Suppose that the set of all triangles with vertices at some 5 points in 3-space is embedded. Then for any point  $A$  of 3-space outside these triangles, the interior of some segment joining  $A$  to the given points, intersects the interior of some triangle.

This follows from Radon Theorem.

(d) Analogously to (b), for every  $n$  there exist a point  $O$  and  $n$  points in 4-space such that the set of all the triangles formed by  $O$  and some two of the  $n$  points, is embedded.

The construction is analogous to the 'cone over  $K_4$ ' construction of Figure 6.2.1, left, in which the 2-dimensional plane in  $\mathbb{R}^3$  we now regard as a 3-dimensional hyperplane in  $\mathbb{R}^4$ . Namely, by General Position Theorem 1.1.2 there exist  $n$  points  $A_1, \dots, A_n$  in a hyperplane

in  $\mathbb{R}^4$  so that the set of all the segments joining the points is embedded. Take a point  $O \in \mathbb{R}^4$  not belonging to the hyperplane. Then the points  $O, A_1, \dots, A_n$  are the required ones.

(e) Analogously to (c), 5 vertices of a 4-dimensional simplex and a point inside it are 6 points in 4-space such that the set of all triangles with vertices at these points is embedded.

No 7 points with this property exist [Sk14, Theorem 1.5] (cf. Proposition 6.5.3.a and the van Kampen-Flores Theorem 7.2.2).

(f) There are 7 points in 4-space such that the set of all but one triangles spanned by these points is embedded.

*Hints to (f).* We present a construction in more generality required for Example 6.7.1; start filling details with the case  $k = 2$ . Take the vertices  $A_0, A_1, \dots, A_{2k}$  of a  $2k$ -simplex in  $\mathbb{R}^{2k}$ . Take its barycenter

$$B := \frac{A_0 + A_1 + \dots + A_{2k}}{2k + 1}, \quad \text{and set } C := \lambda_0 A_0 + \lambda_1 A_1 + \dots + \lambda_{2k} A_{2k}, \quad \text{where}$$

$$\lambda_0 + \lambda_1 + \dots + \lambda_{2k} = 1, \quad 0 < \lambda_1, \dots, \lambda_k < \lambda_0 = \frac{1}{2k + 1} < \lambda_{k+1}, \dots, \lambda_{2k},$$

and no  $2k + 1$  points of  $A_0, A_1, \dots, A_{2k}, B, C$  lie in the same  $(2k - 1)$ -dimensional hyperplane.

Prove that every two  $k$ -simplices  $\Delta_B, \Delta_C$  with disjoint vertices, except  $CA_1 \dots A_k$  and  $BA_{k+1} \dots A_{2k}$ , are disjoint. For this, separate the simplices by a  $(2k - 1)$ -dimensional hyperplane. It suffices to consider the case when  $B \in \Delta_B$  and  $C \in \Delta_C$ . Denote by  $b_0, b_1, \dots, b_{2k}$  barycentric coordinates w.r.t.  $A_0, A_1, \dots, A_{2k}$  (or, alternatively, take  $A_j \in \mathbb{R}^{2k+1}$  be the  $j$ -coordinate unit point, so that  $\mathbb{R}^{2k}$  is the hyperplane  $\sum_{j=0}^{2k} b_j = 1$ ). Then the hyperplane is given by  $b_j = b_l$  for certain  $j, l$ .

More precisely, take  $i = 0, 1, \dots, 2k$  such that  $A_i$  is not the vertex of the simplices.

If  $i = 0$ , then there are  $j, l \in [2k]$  such that  $l > k \geq j$ ,  $A_j \in \Delta_B$  and  $A_l \in \Delta_C$ . Then  $b_l \leq b_j$  on  $\Delta_B$ , and  $b_l \geq b_j$  on  $\Delta_C$ .

If  $i \neq 0$ , then w.l.o.g.  $i > k$ . Assume that  $A_1 \in \Delta_B$ ; the subcase  $A_1 \in \Delta_C$  is proved analogously. Then there is  $l > k$  such that  $A_l \in \Delta_C$ . Then  $b_1 \geq b_l$  on  $\Delta_B$ , and  $b_1 \leq b_l$  on  $\Delta_C$ .

**Задача 6.2.2.** (a) No four of some points in  $\mathbb{R}^3$  lie in one plane. Then a set of triangles with vertices at these points is embedded if and only if triangles without common vertices are disjoint, and triangles having exactly one common vertex intersect only by this vertex.

(b) No five of some points in  $\mathbb{R}^4$  lie in one hyperplane. Then a set of triangles with vertices at these points is embedded if and only if triangles without common vertices are disjoint.

A ‘small shift’ (or ‘general position’) argument shows that every graph is realizable in  $\mathbb{R}^3$ . A straightforward generalization shows the following.

**Задача 6.2.3.** For every  $n$  there exist  $n$  points in  $\mathbb{R}^5$  such that the set of all the triangles spanned by the points is embedded.

The proof is analogous to General Position Theorem 1.1.2: take  $n$  points in  $\mathbb{R}^5$ , of which no six lie in one four-dimensional hyperplane.

An embedded set of  $k$ -simplices in  $\mathbb{R}^d$  is defined analogously to  $k = 2$ .

**Задача 6.2.4.** For every  $k$  and  $n$  there exist  $n$  points in  $\mathbb{R}^{2k+1}$  such that the set of all the  $k$ -simplices spanned by the points is embedded.

### 6.3 Определения и примеры гиперграфов и комплексов

Определим  $k$ -гиперграф (более точно,  $k$ -мерный или  $(k + 1)$ -однородный гиперграф)  $(V, F)$  как конечное множество  $V$  вместе с некоторым набором  $F \subset \binom{V}{k+1}$ , состоящим из  $(k + 1)$ -элементных подмножеств этого множества.

В топологии больше принято (потому что иногда так удобнее) работать не с гиперграфами, а с *комплексами* (мы не будем использовать более громоздкий термин «абстрактный конечный симплициальный комплекс»). Результаты ниже сформулированы для комплексов, хотя некоторые из них справедливы и для гиперграфов.

**Комплекс**  $K = (V, F)$  — это конечное множество  $V = V(K)$  вместе с набором  $F = F(K) \subset 2^V$  подмножеств множества  $V$  таким, что если подмножество  $\sigma$  содержится в этом наборе, то и каждое подмножество множества  $\sigma$  содержится в этом наборе. (Следовательно,  $F \ni \emptyset$ .) На эквивалентном геометрическом языке комплекс является набором замкнутых граней некоторого симплекса. Назовем  **$k$ -комплексом** комплекс, содержащий только не более чем  $(k + 1)$ -элементные множества, т.е. не более чем  $k$ -мерные симплексы.

Элементы множеств  $V$  и  $F$  называются **вершинами** и **гранями** соответственно. **Ребром** называется двухэлементная (т.е. одномерная) грань.

**Полный  $k$ -комплекс на  $n$  вершинах** (или  $k$ -мерный остов  $(n - 1)$ -мерного симплекса)

$$\Delta_{n-1}^k := \left( [n], \left( \begin{matrix} [n] \\ \leq k+1 \end{matrix} \right) \right)$$

— это  $n$ -элементное множество  $[n]$  вместе с набором  $\left( \begin{matrix} [n] \\ \leq k+1 \end{matrix} \right)$  всех его не более чем  $(k + 1)$ -элементных подмножеств. См. рис. 6.2.1 справа. Для  $k = 2$  это полный граф  $K_n$ . Для  $k = 0$  мы обозначаем этот комплекс через  $[n]$ , для  $n = k + 1$  — через  $D^k$  (это  $k$ -мерный симплекс или  $k$ -мерный диск), и для  $n = k + 2$  — через  $S^k$  (это  $k$ -мерная сфера).

**Конусом**  $\text{Con } K$  над графом  $K = (V, E)$  называется 2-комплекс с множеством вершин  $V \cup \{c\}$ ,  $c \notin V$ , и гранями  $\{c, i, j\}$ , где  $\{i, j\} \in E$ . См. рис. 6.2.1 слева. Название «конус» принято потому, что конус над циклом «выглядит» как боковая поверхность «обычного» конуса. Конус над комплексом определяется аналогично.

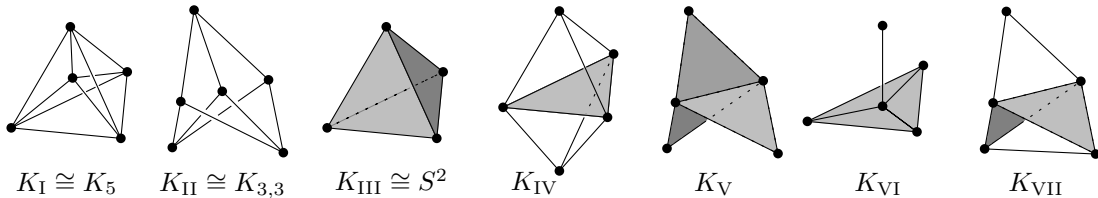


Рис. 6.3.1: Двумерные комплексы, не реализуемые в плоскости

*Кнопкой* называется 2-комплекс с вершинами  $c, 0, 1, 2, 3$ , грани которого —  $\{0, 1, 2\}$ ,  $\{0, 1, 3\}$ ,  $\{0, 2, 3\}$ , все их двухэлементные подмножества и  $\{c, 0\}$ ; см. рис. 6.3.1,  $K_{VI}$ . См. другие примеры на рис. 6.3.1.

Примеры комплексов фактически приведены в п. 6.2.

See another examples in §6.16 and in §6.17.

## 6.4 Симплициальная вложимость комплексов

Определение реализуемости гиперграфов и комплексов в  $\mathbb{R}^d$  похоже на определение реализуемости графов на плоскости. Например, в случае 2-комплекса каждому трехэлементному подмножеству сопоставляется треугольник в  $\mathbb{R}^d$ . Существуют разные формализации идеи реализуемости.

Комплекс  $(V, F)$  **симплициально** (или линейно) **вложим** в  $\mathbb{R}^d$ , если существует биекция  $V \rightarrow V' \subset \mathbb{R}^d$  со следующими свойствами:

- для любого подмножества  $\sigma \subset V'$ , соответствующего грани, его выпуклая оболочка  $\langle \sigma \rangle$  является симплексом размерности  $|\sigma| - 1$ ;

• для любых подмножеств  $\sigma, \tau \subset V'$ , соответствующих граням, выполнено равенство  $\langle \sigma \rangle \cap \langle \tau \rangle = \langle \sigma \cap \tau \rangle$ .<sup>23</sup>

Эти свойства формализуют «отсутствие самопересечений».

**Пример 6.4.1.** <sup>24</sup> (a) Каждый из 2-комплексов, изображенных на рисунке 6.3.1, симплициально вложим в  $\mathbb{R}^3$  (что показывает сам рисунок), но не в  $\mathbb{R}^2$ .

(b) Полный 2-комплекс с 4 вершинами симплициально вложим в  $\mathbb{R}^3$ , но не в  $\mathbb{R}^2$ .

(c) Полный 2-комплекс с 5 вершинами симплициально вложим в  $\mathbb{R}^3$  (рис. 6.2.1 справа).

(d) Комплекс, полученный из полного 2-комплекса с 6 вершинами удалением двух граней, не имеющих общих вершин, симплициально вложим в  $\mathbb{R}^3$  (пример 6.2.1.c').

(e) Объединение полного 2-комплекса с 5 вершинами и конуса над множеством его вершин не является симплициально вложимым в  $\mathbb{R}^3$  (пример 6.2.1.c'').

(f) Конус над любым планарным графом симплициально вложим в  $\mathbb{R}^3$  (рис. 6.2.1 слева), но (для графа, имеющего вершину степени 3) не в  $\mathbb{R}^2$ .

(g) Полный 2-комплекс с 6 вершинами симплициально вложим в  $\mathbb{R}^4$  (аналогично рис. 6.2.1 справа), но не в  $\mathbb{R}^3$  (поскольку он содержит  $\text{Con } K_5$ ).

(h) Полный 2-комплекс с 7 вершинами симплициально вложим в  $\mathbb{R}^5$  (по теореме 6.4.2 ниже), но не в  $\mathbb{R}^4$  (по линейной теореме ван Кампена-Флореса 7.1.2).

(i) Комплекс, полученный из полного 2-комплекса с 7 вершинами удалением грани, симплициально вложим в  $\mathbb{R}^4$  (пример 6.2.1.f).

(j) Конус над любым непланарным графом симплициально вложим в  $\mathbb{R}^4$  (аналогично рис. 6.2.1 слева), но не в  $\mathbb{R}^3$ .

(k) Склейка двух конусов над любым комплексом  $K$  по их общему основанию (т.е. надстройкой  $\Sigma K = K * [2]$ ) симплициально вложима в  $\mathbb{R}^{d+1}$  тогда и только тогда, когда  $K$  симплициально вложим в  $\mathbb{R}^d$  [АКМ, утверждение 13].

(l)\* Верно ли, что если конус над комплексом  $K$ , не гомеоморфным  $S^d$ , симплициально вложим в  $\mathbb{R}^{d+1}$ , то  $K$  симплициально вложим в  $\mathbb{R}^d$ ? (Ответ мне неизвестен. Два комплекса называются гомеоморфными, если один можно получить из другого операциями подразделения ребра на рис. 6.5.1 слева и обратными к ним.)

**Теорема 6.4.2** (общего положения). Любой  $k$ -комплекс симплициально вложим в  $\mathbb{R}^{2k+1}$ .

This is a reformulation of Assertion 6.2.4.

Еще на заре развития топологии математики поняли, что в теореме общего положения 6.4.2 число  $2k + 1$  нельзя уменьшить. См. линейную теорему ван Кампена-Флореса 7.1.2; ср. с теоремой ван Кампена-Флореса 7.2.2 и утверждением 6.5.3.

**Утверждение 6.4.3** (ср. утверждение 1.1.3). Для любых фиксированных  $d, k$  существует алгоритм распознавания симплициальной вложимости  $k$ -комплексов в  $\mathbb{R}^d$ .<sup>25</sup>

О сложности распознавания симплициальной вложимости см. [АКМ]. We conjecture that the analogue of Theorem 6.6.3 for *simplicial* embeddability holds. M. Tancer suggests that it is plausible to approach the conjecture the same way as in [MTW, ST17].

<sup>23</sup>This property means that there is an embedded set of simplices in  $\mathbb{R}^d$  whose vertices correspond to  $V$  and whose simplices correspond to  $F$  (an embedded set of simplices of different dimensions in  $\mathbb{R}^d$  is defined analogously to §6.2).

<sup>24</sup>Parts of this example are discussed in a simpler language in §6.2. Утверждения, приведенные в этом примере без ссылок, доказываются несложно.

<sup>25</sup>This problem is PSPACE, meaning that there is an algorithm that uses polynomial space for computation (but not polynomial time). It turns out from the complexity theory that the time is bounded by an exponential function. Also, whatever problem is solvable in NP, it is also solvable in PSPACE. But it is conjectured that PSPACE is in general worse than NP and in particular than P.

## 6.5 Кусочно-линейная вложимость комплексов

Операция *подразделения ребра* изображена на рис. 6.5.1 слева (упражнение: выразите операцию *подразделения грани* на рис. 6.5.1 справа через операцию подразделения ребра и обратную к ней). **Подразделением** комплекса  $K$  называется любой комплекс, полученный из  $K$  путем нескольких операций подразделения ребра.

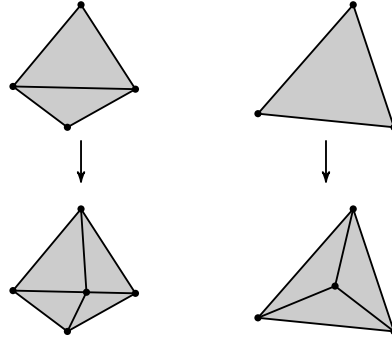


Рис. 6.5.1: Подразделения ребра и грани

Комплекс **PL** (кусочно-линейно) **вложим** в  $\mathbb{R}^d$ , если некоторое его подразделение симплициально вложимо в  $\mathbb{R}^d$ .

**Замечание 6.5.1.** (а) Ясно, что из симплициальной вложимости комплекса в  $\mathbb{R}^d$  вытекает его PL вложимость в  $\mathbb{R}^d$ . Обратное верно для  $d = 2$ : *если комплекс PL вложим в плоскость, то он симплициально вложим в плоскость* (это следует из теоремы Фари 1.2.1). Обратное неверно для 2-комплексов и  $d \in \{3, 4\}$  [vK41, PW], [MTW, §2], ср. [MTW, Corollary 1.2]. Тем не менее, все результаты из примера 6.4.1 о симплициальной невложимости верны и для PL невложимости; доказательства аналогичны.

(b) A *simplicial, PL or topological (TOP) embedding* of a complex  $K$  in  $\mathbb{R}^d$  is an injective simplicial, PL or continuous map  $|K| \rightarrow \mathbb{R}^d$  of the body of the complex. Clearly, a complex is simplicially (PL) embeddable in  $\mathbb{R}^d$  if and only if there is a simplicial (PL) embedding of the complex in  $\mathbb{R}^d$ . A complex is called *TOP embeddable* in  $\mathbb{R}^d$  if there is a TOP embedding of the complex in  $\mathbb{R}^d$ . понятие топологической вложимости не используется в данном тексте outside this remark and Remark 6.10.2.

(c) Clearly, PL embeddability implies TOP embeddability. PL and TOP embeddability of  $k$ -complexes in  $S^d$  are equivalent for  $d \geq k + 3$  [Br72] or for  $d = k + 1 \in \{2, 3\}$  [Mo77]. Apparently they are equivalent for  $d = k \in \{2, 3\}$ . They are not equivalent for  $d = k = 5$  because the double suspension over Poincaré 3-sphere is homeomorphic to  $S^5$  but not PL homeomorphic to  $S^5$ . Apparently they are not equivalent for  $\max\{4, k\} \leq d \leq k + 1$ . (E.g. a homology 3-sphere with non-trivial Rokhlin invariant topologically embeds in  $S^4$  but does not *smoothly* embed in  $S^4$ , so apparently does not PL embed in  $S^4$ .) It would be interesting to know if they are equivalent for  $d = k + 2 \geq 4$ . Cf. [MTW, Appendix C].

**Задача 6.5.2.** (a) The cone over a complex  $K$  not PL homeomorphic to  $S^d$  (i.e., not having a common subdivision with  $S^d$ ) PL embeds in  $\mathbb{R}^{d+1}$  if and only if  $K$  PL embeds in  $\mathbb{R}^d$ .

(b) If a  $(d-1)$ -hyperplane splits  $d$ -simplex into parts, then every part is PL homeomorphic to the  $d$ -simplex.

*Hints.* For the ‘only if’ implication of (a), take a small  $(d+1)$ -simplex in  $\mathbb{R}^{d+1}$  containing the vertex of the cone in its interior, and one of whose  $d$ -faces is disjoint with the cone. Use (b).

For (b), take a point on the hyperplane in the interior of  $d$ -simplex. Then (b) is essentially reduced to the case when the hyperplane passes through the vertex of the  $d$ -simplex. Hence the hyperplane splits the  $(d - 1)$ -simplex opposite to the vertex, and one can use induction.

(c) The boundary of  $(d + 1)$ -simplex is not PL embeddable in  $\mathbb{R}^d$ .

*Hint.* Prove and use higher-dimensional analogue of Remark 1.3.6.

**Утверждение 6.5.3.** *Для любого  $k$  никакой из следующих  $k$ -комплексов PL (и, как следствие, симплициально) не вложим в  $\mathbb{R}^{2k}$ .*

(a) *Полный  $k$ -комплекс с  $2k + 3$  вершинами.*

(b) *Комплекс размерности  $k$  с  $3(k + 1)$  вершинами, разбитыми на  $k + 1$  троек, в котором на любую  $k + 1$  вершину из разных троек натянута грань (это граф  $K_{3,3}$  при  $k = 1$ ; это  $(k + 1)$ -я джойнстепень  $[3]^{*k+1}$  трюточия, см. п. 6.16).*

(c) *Декартова  $k$ -я степень любого непланарного графа (см. определение в п. 6.17).*

Это утверждение — один из ранних результатов *комбинаторной топологии* (сейчас называемой алгебраической топологией) и *топологической комбинаторики* (также являющейся областью активных исследований).

Пункты (a) и (b) выведены Эгбертом ван Кампеном в 1933 г. [vK32] из леммы 6.7.3 (и ее аналога для  $[3]^{*k+1}$ ) при помощи аппроксимации. (Фактически выведена теорема ван Кампена 7.2.2, поскольку любое отображение в  $\mathbb{R}^{2k}$  из  $k$ -мерного остова симплекса произвольной размерности продолжается на весь симплекс, см., например, [Sk20, §3.4].) Эти пункты также выведены Алехандро Флоресом в 1934 г. [F134] из теоремы Борсука-Улама 6.5.4, см. ниже. Пункт (c) сформулирован в качестве гипотезы Карлом Менгером в 1929 г., но доказан только Брайаном Уммелем в 1978 г. для  $k = 2$  [Um78] и Михаилом Скопенковым в 2003 г. для произвольного  $k$  [Sk03], см. изложение идеи в обзоре [Sk14].

*Proof of Proposition 6.5.3.b.* We present the proof for  $k = 2$ ; the general case is analogous.<sup>26</sup> Let  $T = K_{3,1} = [1] * [3]$  be the triod. By Assertion 6.17.4.e the cube  $T^3$  is PL homeomorphic to the cone over  $[3]^{*3}$ . So by Assertion 6.5.2.a it suffices to prove that  $T^3$  does not embed into  $\mathbb{R}^5$ .

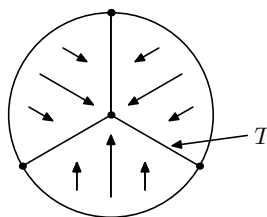


Рис. 6.5.2: A contraction

Suppose to the contrary that there is an embedding  $f : T^3 \rightarrow \mathbb{R}^5$ . Let  $p : D^2 \rightarrow T$  be a map which does not identify any antipodes  $x, -x \in D^2 - \{0\}$  (e.g. the map from Figure 6.5.2). Define the map

$$q : \partial D^6 \rightarrow T^3 \quad \text{by} \quad q(x_1, \dots, x_6) := (p(x_1, x_2), p(x_3, x_4), p(x_5, x_6))$$

Clearly,  $q$  does not identify any antipodes. Then  $q \circ f$  does not identify any antipodes. This contradicts the following Borsuk-Ulam Theorem 6.5.4.  $\square$

<sup>26</sup>Аналог этого доказательства для  $k = 1$  обобщает доказательство замечания 2.4.1.a при помощи образов хулигана и полицейского, приведенное перед задачей 8.1.2.

This proof is essentially a simplified exposition of Flores' proof [F134], [Ma03, §5]. We do not mention deleted join (which is not really required for this proof) and we work with the property 'Con  $C$  embeds in  $\mathbb{R}^d$ ' simpler than 'there is a map  $f : \text{Con } C \rightarrow \mathbb{R}^d$  such that  $f(C) \cap f(\text{Con } C - C) = \emptyset$ '. This exposition was invented by E. Schepin and the author [Sc84, Appendix], [RS01], [Sk06, §5].

Обозначим

$$S^n := \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} : x_1^2 + \dots + x_{n+1}^2 = 1\}.$$

We consider only continuous maps and omit ‘continuous’. For a discussion and simple proof of the following result see [Ma03], [Sk20, §8].

**Теорема 6.5.4** (Борсука-Улама). *Для любого отображения  $f : S^d \rightarrow \mathbb{R}^d$  существует такое  $x \in S^d$ , что  $f(x) = f(-x)$ .*

## 6.6 Алгоритмические результаты о PL вложимости

**Теорема 6.6.1** (ср. с утверждением 1.2.2). *Для любых фиксированных  $d, k$  таких, что  $k = 2 \neq d - 2$  или  $d \geq \frac{3k+3}{2}$ , существует алгоритм распознавания PL вложимости  $k$ -комплексов в  $\mathbb{R}^d$ .*

В [MTW, приложение A] объясняется, что теорема 6.6.1 для  $k = d = 2$  (даже с линейным алгоритмом) следует из критерия типа Куратовского планарности 2-комплексов. Этот критерий доказан Р. Халином и Х.А. Юнгом в 1964, см. [MTW, приложение A]. Теорема 6.6.1 для  $k = d - 1 = 2$  доказана в [MST+]. В [СКV, текст после теоремы 1.4], [ST17, §1] объясняется, что теорема 6.6.1 для  $d \geq \frac{3k+3}{2}$  (даже с полиномиальным алгоритмом) следует из [СКV, теорема 1.1] и критерия вложимости комплексов в терминах конфигурационных пространств. Этот критерий доказан Андре Хефлигером и Клодом Вебером, см. теорему 8.2.4.

Предположения теоремы 6.6.1 выполнены при  $d = 2k \geq 6$ . Идея доказательства для  $d = 2k \geq 6$  обобщает случай  $d = 2k = 2$  (§1.5), см. §6.8 и §6.9.

**Теорема 6.6.2.** *Для любых фиксированных  $d, k$  таких, что  $5 \leq d \in \{k, k + 1\}$ , не существует алгоритма распознавания PL вложимости  $k$ -комплексов в  $\mathbb{R}^d$ .*

В [MTW, теорема 1.1] это выводится из теоремы Сергея Петровича Новикова о нераспознаваемости сферы. Аналог теоремы 6.6.2 для  $8 \leq d \leq \frac{3k+1}{2}$  анонсирован в статье [FWZ], содержащей ошибку [Sk20e, §3] (см. также [KS20]).

Алгоритмическая задача принадлежит *классу NP*, если ее ответ можно проверить за полиномиальное (относительно параметров задачи) число шагов. Задача называется *NP-трудной*, если любая задача класса NP сводится к ней за полиномиальное число шагов. Приведем детальное определение на эквивалентном языке. Назовем *3-КНФ-формулой* формулу, являющуюся конъюнкцией дизъюнкций, в которой каждая дизъюнкция «содержит» три переменных или их отрицания (например,  $(x_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3)(\bar{x}_2 \vee x_3 \vee x_4)(\bar{x}_1 \vee x_2 \vee x_4)$ ). Алгоритмическая задача распознавания свойства  $\alpha(K)$  «объекта»  $K$  называется *NP-трудной*, если существует полиномиальный по количеству конъюнкций в 3-КНФ-формуле  $\Phi$  алгоритм, строящий по  $\Phi$  объект  $K(\Phi)$  такой, что  $\alpha(K(\Phi))$  выполнено тогда и только тогда, когда формула  $\Phi$  не задает тождественный нуль (ср. с [ST17, Theorem 2]).

**Теорема 6.6.3.** *Для любых фиксированных  $d, k$  таких, что  $3 \leq d \leq \frac{3k}{2} + 1$ , алгоритмическая задача распознавания PL вложимости  $k$ -комплексов в  $\mathbb{R}^d$  является NP-трудной.*

Это доказано для  $d \geq 4$  и  $d = 3$  Иржи Матушеком, Мартином Танцером и Ульрихом Вагнером в 2008 [MTW] и Арно де Месмэ, Йоавом Риком, Эриком Сегдвиком и Мартином Танцером в 2017 [MRS+], соответственно. См. более простое изложение для случая  $d \geq 4$  в [ST17] (где также доказано обобщение). Доказательство для случая  $d \geq 4$



использует построение [SS92, FKT, SSS] контрпримеров к аналогу упомянутому выше критерию вложимости комплексов в терминах конфигурационных пространств (при отсутствии размерностного ограничения, имеющегося в критерии). Объяснение идей этого доказательства на маломерных примерах содержится в утверждениях 1.7.1, 1.7.2 и в пп. 6.11, 6.12.

Следующая таблица подытоживает упомянутые выше результаты по алгоритмической задаче распознавания PL вложимости  $k$ -комплексов в  $\mathbb{R}^d$  (+ = комплекс всегда вложим, P = задача алгоритмически разрешима за полиномиальное время, D = задача алгоритмически разрешима, NPh = задача NP-трудная, UD = задача алгоритмически неразрешима).

$k \setminus d$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
1	P	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
2	P	D,NPh	NPh	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
3		D,NPh	NPh	NPh	P	+	+	+	+	+	+	+	+
4			NPh	UD	NPh	NPh	P	+	+	+	+	+	+
5				UD	UD	NPh	NPh	P	P	+	+	+	+
6					UD	UD	NPh	NPh	NPh	P	P	+	+
7						UD	UD	NPh	NPh	NPh	P	P	P

В частности, неизвестно, существует ли алгоритм распознавания PL вложимости 2-комплексов в  $\mathbb{R}^4$ .

## 6.7 Van Kampen number for $k$ -complexes in $\mathbb{R}^{2k}$

In this section we present a simple proof of Theorem 7.2.2 (and hence of Proposition 6.5.3.a). Theorem 7.2.2 follows from Lemma 6.7.3 below by the usual approximation argument (cf. §1.4). Это доказательство интересно даже для  $k = 2$  (для  $k = 1$  оно повторяет рассуждения из п. 1.4).

**Пример 6.7.1.** *For any  $k$  there exist  $2k + 3$  points in  $\mathbb{R}^{2k}$  such that no  $2k + 1$  them lie in one  $(2k - 1)$ -hyperplane and only for one non-ordered pair of disjoint  $(k + 1)$ -element subsets formed by these points, the convex hulls of the subsets intersect.*

This is a version (of a higher-dimensional analogue) of Example 6.2.1.f.

Отображение  $f : \Delta \rightarrow \mathbb{R}^d$  симплекса  $\Delta$  называется **линейным**, если

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) = \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$$

для любых  $\lambda \in [0, 1]$ ,  $x, y \in \Delta$ .

Let  $K$  be a complex. The **body** (or geometric realization)  $|K|$  of  $K$  is the union of faces corresponding to  $F$  of a simplex with the set  $V$  of vertices. Below we often abbreviate  $|K|$  to  $K$ ; no confusion should arise. Отображение  $|K| \rightarrow \mathbb{R}^d$  называется **симплициальным**, если оно линейно на каждой грани комплекса  $K$ . Отображение  $|K| \rightarrow \mathbb{R}^d$  называется **PL** (кусочно-линейным), если оно линейно на каждой грани некоторого подразделения комплекса  $K$ .

Несколько точек в  $\mathbb{R}^{2k}$  *находятся в общем положении*, если никакие  $2k + 1$  из них не лежат в одной  $(2k - 1)$ -гиперплоскости, и никакие три  $k$ -симплекса, натянутые на них, не имеют общей внутренней точки. PL отображение  $K \rightarrow \mathbb{R}^d$  называется отображением **общего положения**, если образы вершин некоторого подразделения комплекса  $K$ , на каждой грани которого отображение линейно, находятся в общем положении.

**Утверждение 6.7.2** (ср. утверждение 1.3.1). Для любых отображения  $f : K \rightarrow \mathbb{R}^{2k}$  общего положения комплекса  $K$  и его несмежных граней  $\sigma, \tau$  образы  $f\sigma$  и  $f\tau$

- не пересекаются при  $\dim \sigma + \dim \tau < 2k$  и
- пересекаются в конечном числе точек при  $\dim \sigma + \dim \tau = 2k$ .

Denote by  $\Delta_n$  the  $n$ -dimensional simplex (here the previous notation  $D^n$  disagrees with the standard notation). Let  $f : \Delta_{2k+2} \rightarrow \mathbb{R}^{2k}$  be a general position map. By Proposition 6.7.2 the images of any two disjoint  $k$ -faces intersect at a finite number of points. The *van Kampen number* ('the self-intersection invariant')  $v(f) \in \mathbb{Z}_2$  is defined to be the parity of the number of all such intersection points, for all pairs of disjoint  $k$ -faces.

**Лемма 6.7.3** (cf. Lemmas 1.4.3 and 2.2.3). Для любого отображения общего положения  $f : \Delta_{2k+2} \rightarrow \mathbb{R}^{2k}$  число ван Кампена нечетно.

Эта лемма интересна даже для линейных вложений при  $k > 1$ . Lemma 6.7.3 follows from Example 6.7.1 and Assertion 6.7.4.c.

- Задача 6.7.4.** For any two general position maps  $f_0, f_1 : \Delta_{2k+2} \rightarrow \mathbb{R}^{2k}$
- (a) coinciding on  $(k-1)$ -skeleton we have  $v(f_0) = v(f_1)$ .
  - (b) coinciding on  $(k-2)$ -skeleton we have  $v(f_0) = v(f_1)$ .
  - (c) we have  $v(f_0) = v(f_1)$ .

*Sketch of a proof.* Part (a) is proved analogously to Lemma 1.4.3 using  $2k$ -dimensional analogue of the Parity Lemma 5.3.4.b.

Part (b) is proved analogously to the alternative proof of Assertion 1.1.1.b (cf. end of the proof of Lemma 1.5.6).

(Alternatively, (b) is proved as follows. Придумайте многомерный аналог преобразования Райдемайстера на рис. 1.5.1.V; для  $k = 2$  см. задачу 5.2.2.a. Prove that any two general position maps  $\Delta_{2k+2} \rightarrow \mathbb{R}^{2k}$  can be made the same on  $(k-1)$ -skeleton by Reidemeister moves, and by homotopies keeping images of non-adjacent  $k$ -faces disjoint.)

Part (c) follows by (b) since any two general position maps  $\Delta_{2k+2} \rightarrow \mathbb{R}^{2k}$  can be made the same on  $(k-2)$ -skeleton by homotopies keeping images of non-adjacent  $k$ -faces disjoint.  $\square$

*Другое доказательство утверждения 6.7.4.c для  $k = 1$ .* (This proof can be generalized to higher dimensions.) For  $t = 0, 1$  define the *self-intersection (van Kampen) set*

$$V(f_t) := \{x \in \mathbb{R}^2 : |f_t^{-1}(x)| > 1\}.$$

Let  $f_t : K_5 \rightarrow \mathbb{R}^2$  be a general position homotopy between  $f_0$  and  $f_1$ . Recall that  $I = [0, 1]$ . Define the *self-intersection (van Kampen) set*

$$V := \{(x, t) \in \mathbb{R}^2 \times I : |f_t^{-1}(x)| > 1\}.$$

The required equality  $v(f_0) = v(f_1)$  follows because

(\*)  $V$  есть объединение конечного числа (замкнутых и незамкнутых) попарно непересекающихся ломаных, множество концов которых есть  $V(f_0) \sqcup V(f_1)$ .

The assertion (\*) can be proved using the following different view at  $V$ . Define a map  $F : K_5 \times I \rightarrow \mathbb{R}^2 \times I$  by  $F(x, t) := (f_t(x), t)$ . Then

$$V = V(F) := \{(x, t) \in \mathbb{R}^2 \times I : |F^{-1}(x, t)| > 1\}.$$

Denote by  $K_5$  the body of graph  $K_5$ , i.e. the 1-skeleton of the 4-simplex, or certain subset of  $\mathbb{R}^3$ . Симплициальным взрезанным квадратом графа  $K_5$  называется объединение

$$\widetilde{K}_5 := \cup \{\sigma \times \tau \subset K_5 \times K_5 : \sigma, \tau \text{ — ребра графа } K_5 \text{ и } \sigma \cap \tau = \emptyset\}.$$

(Т.е.  $\widetilde{K}_5$  — клеточный подкомплекс клеточного 2-комплекса  $K_5 \times K_5$ , состоящий из всех клеток  $\sigma \times \tau$ , не содержащих ни одной «диагональной» вершины.) Then the set

$$\Sigma := \{(x, y, t) \in \widetilde{K}_5 \times I : F_t(x) = F_t(y)\}$$

is ‘two copies of  $V(F)$ ’. The assertion (\*) now follows from its analogue for  $V$  replaced by  $\Sigma$ , and  $V_t$  replaced by

$$\Sigma_t := \{(x, y) \in \widetilde{K}_5 : f_t(x) = f_t(y)\}.$$

This analogue is proved analogously to [Sk20, Assertions 8.3.6, 8.3.7a, 6.8.3, 6.8.5 of electronic version] because

for each vertex  $A$  and edge  $\sigma$  of  $K_5$  such that  $A \notin \sigma$  there are exactly two edges  $\tau \ni A$  disjoint with  $\sigma$ .<sup>27</sup>

(To show this analogue, one can define a map  $\overline{F} : \widetilde{K}_5 \times I \rightarrow \mathbb{R}^2$  by  $\overline{F}(x, y, t) = f_t(x) - f_t(y)$ . Then  $\Sigma = \overline{F}^{-1}(0)$ .)  $\square$

## 6.8 Распознавание $\mathbb{Z}_2$ -вложимости $k$ -комплексов в $\mathbb{R}^{2k}$

В этом и следующем пунктах мы, обобщая построения из п. 1.5, приведем идею доказательства теоремы распознаваемости 6.6.1 для  $m = 2n$ . Она следует из теоремы Ван Кампена-Шапиро-Бу 6.9.2.a и утверждения 6.9.3. Поскольку мы используем теорему Ван Кампена-Шапиро-Бу 6.9.2.a без доказательства, то знать определение PL вложения для изучения этого пункта не нужно. Вместо этого понадобится определения PL отображения комплекса в  $\mathbb{R}^d$  (§6.7). Чтобы продемонстрировать основную идею, докажем следующее утверждение 6.8.2.

PL отображение  $f : K \rightarrow \mathbb{R}^{2k}$  общего положения  $k$ -комплекса  $K$  называется  **$\mathbb{Z}_2$ - (почти) вложением**, если  $f$ -образы любых двух непересекающихся  $k$ -мерных граней пересекаются в четном числе точек.

The notion of  $\mathbb{Z}_2$ -embedding is most actively studied for the case of graphs drawings on surfaces, see survey [Sc13] and [FK19, Bi21].

E.g.  $\Delta_{2k+2}$  is not  $\mathbb{Z}_2$ -embeddable to  $\mathbb{R}^{2k}$  by Lemma 6.7.3.

**Утверждение 6.8.1** ([Me06, Example 3.6]). *Для любого  $k \geq 2$  существует  $k$ -комплекс,  $\mathbb{Z}_2$ -вложимый в  $\mathbb{R}^{2k}$ , но не вложимый в  $\mathbb{R}^{2k}$  (и даже не  $\mathbb{Z}$ -вложимый в  $\mathbb{R}^{2k}$ , см. §6.9).*

**Утверждение 6.8.2.** *Для любого  $k$  существует полиномиальный (по количеству вершин) алгоритм распознавания  $\mathbb{Z}_2$ -вложимости  $k$ -комплексов в  $\mathbb{R}^{2k}$ .*

Это следует из утверждения 6.8.7 аналогично случаю  $k = 1$  (§1.5).

**Пример 6.8.3.** *Обозначим  $M(t) := (t, t^2, \dots, t^{2k})$ . Для любых двух наборов  $0 < u_0 < u_1 < \dots < u_k$  и  $0 < v_0 < v_1 < \dots < v_k$  симплексы  $M(u_0)M(u_1) \dots M(u_k)$  и  $M(v_0)M(v_1) \dots M(v_k)$  пересекаются тогда и только тогда, когда элементы подмножеств чередуются (т.е. когда  $u_0 < v_0 < u_1 < v_1 < u_2 < \dots < v_k$  или то же с переменной местами  $u$  и  $v$ ).*

Пусть дано PL отображение  $f : K \rightarrow \mathbb{R}^{2k}$  общего положения  $k$ -комплекса  $K$ . Возьмем любые две непересекающиеся  $k$ -мерные грани  $\sigma, \tau$ . Поставим в соответствие неупорядоченной паре  $\{\sigma, \tau\}$  вычет

$$|f\sigma \cap f\tau| \pmod{2}.$$

<sup>27</sup>Moreover,  $\widetilde{K}_5$  is a 2-manifold, see Problem 8.2.1.f.

Обозначим через  $K^*$  множество неупорядоченных пар непересекающихся  $k$ -мерных граней комплекса  $K$ . **Расстановкой (или коциклом) пересечений** (по модулю 2) отображения  $f$  называется полученное отображение  $K^* \rightarrow \mathbb{Z}_2$ , или соответствующее подмножество в  $K^*$ . Отображения  $K^* \rightarrow \mathbb{Z}_2$  будем отождествлять с подмножествами в  $K^*$  (состоящими из пар, переходящих в  $1 \in \mathbb{Z}_2$ ).

Ясно, что расстановка пересечений нулевая для любого  $\mathbb{Z}_2$ -вложения.

Как меняется расстановка пересечений при многомерном аналоге преобразования Райдемайстера на рис. 1.5.1.V? Ответ дается следующим определением и утверждением.

**Элементарной кограницей** пары  $(\alpha, \sigma)$  непересекающихся  $(k-1)$ - и  $k$ -мерных граней называется подмножество  $\delta(\alpha, \sigma) \subset K^*$ , состоящее из всех пар  $\{\sigma, \tau\}$  с  $\tau \supset \alpha$ .

**Утверждение 6.8.4.** *Даны  $k$ -комплекс  $K$  и его непересекающиеся  $(k-1)$ - и  $k$ -мерные грани  $\alpha$  и  $\sigma$ . Тогда для любого PL отображения  $f : K \rightarrow \mathbb{R}^{2k}$  общего положения существует PL отображение  $f' : K \rightarrow \mathbb{R}^{2k}$  общего положения такое, что разность расстановок пересечений для  $f$  и для  $f'$  равна  $\delta(\alpha, \sigma)$ .*

**Задача 6.8.5.** (а) Найдите элементарную кограницу пары  $(\{4, 5\}, \{1, 2, 3\})$  для  $\Delta_5^2$ .

(б) То же для  $\Delta_6^2$ .

(с) Является ли расстановка  $\{\{135\}, \{246\}\}$  элементарной кограницей для  $\Delta_5^2$ ?

(д) (ср. с примером 6.7.1 для  $k = 2$ ) Является ли расстановка  $\{\{135, 246\}\}$  элементарной кограницей для  $\Delta_6^2$ ? А суммой нескольких элементарных кограниц?

Назовем расстановки  $\nu_1, \nu_2 : K^* \rightarrow \mathbb{Z}_2$  **когомологичными**, если

$$\nu_1 - \nu_2 = \delta(\nu_1, \tau_1) + \dots + \delta(\nu_s, \tau_s)$$

для некоторых пар  $(\nu_1, \tau_1), \dots, \delta(\nu_s, \tau_s)$ .

**Лемма 6.8.6.** *Расстановки пересечений разных PL отображений общего положения одного  $k$ -комплекса в  $\mathbb{R}^{2k}$  когомологичны.*

The proof is analogous to the proof of Assertion 6.7.4, or to the proof of Lemma 1.5.6 given below.

**Утверждение 6.8.7** (cf. Proposition 1.5.7). *Комплекс размерности  $k$  является  $\mathbb{Z}_2$ -вложимым в  $\mathbb{R}^{2k}$  тогда и только тогда, когда расстановка пересечений некоторого (или, эквивалентно, любого) его PL отображения общего положения в  $\mathbb{R}^{2k}$  когомологична нулевой расстановке.*

Это утверждение следует из утверждения 6.8.4 и леммы 6.8.6.

*Другое доказательство леммы 1.5.6.* (This proof can be generalized to Lemma 6.8.6 and perhaps to higher multiplicity, see [Sk18, Problem 2.3.7].) Let  $K$  be the graph. Возьмем произвольную PL гомотопию «общего положения»  $f_t : K \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $t \in [0, 1]$ , между данными PL отображениями общего положения  $f_0$  и  $f_1$ . By general position, for every vertex  $A$  and edge  $\alpha \not\ni A$  there is a finite number of  $t \in [0, 1]$  such that  $f_t A \in f_t \alpha$  (this follows because this number equals  $F(A \times I) \cap F(\alpha \times I)$ , where  $F$  is defined below). Обозначим через  $(A_1, \alpha_1), \dots, (A_k, \alpha_k)$  все такие пары  $(A, \alpha)$ , для которых количество таких  $t$  нечетно. Достаточно доказать, что разность расстановок пересечений  $\nu(f_0)$  для  $f_0$  и  $\nu(f_1)$  для  $f_1$  равна

$$\nu(f_0) - \nu(f_1) = \delta(A_1, \alpha_1) + \dots + \delta(A_k, \alpha_k).$$

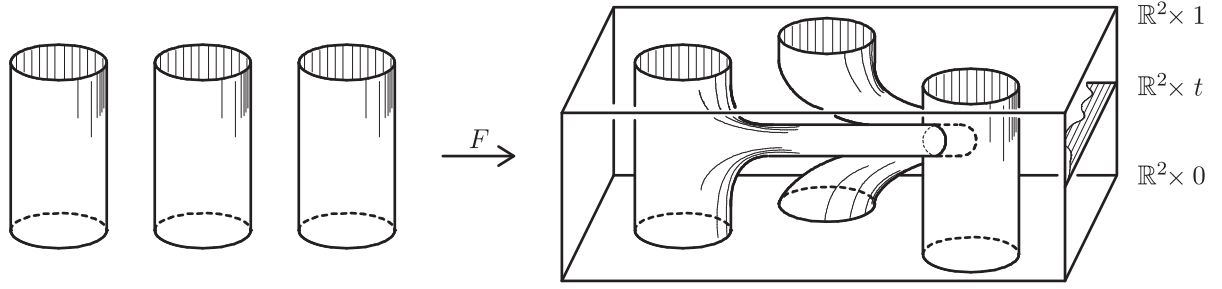


Рис. 6.8.1: A homotopy

Let us prove this equality. Denote  $I := [0, 1]$ . The homotopy  $f_t$  can be seen (fig. 6.8.1) as a ‘general position’ PL map  $F : K \times I \rightarrow \mathbb{R}^2 \times I$  such that

$$F(K \times t) \subset \mathbb{R}^2 \times t \quad \text{for each } t \in I \quad \text{and} \quad F(x, t) = f_t(x) \quad \text{for each } t = 0, 1.$$

Then the required equality follows because

$$\nu(f_0)_{\sigma, \tau} - \nu(f_1)_{\sigma, \tau} = |f_0\sigma \cap f_0\tau|_2 + |f_1\sigma \cap f_1\tau|_2 \stackrel{(2)}{=}$$

$$\stackrel{(2)}{=} |F(\partial\sigma \times I) \cap F(\tau \times I)|_2 + |F(\sigma \times I) \cap F(\partial\tau \times I)|_2 = \sum_{A \notin \alpha} |F(A \times I) \cap F(\alpha \times I)|_2 \delta(A, \alpha)_{\sigma, \tau}.$$

Let us prove equality (2). By general position for each two disjoint edges  $\sigma, \tau$  the intersection  $C := F(\sigma \times I) \cap F(\tau \times I)$  is a finite union of non-degenerate segments. The number of odd-degree vertices in the graph  $C$  is even (note that  $C$  can have vertices of degree greater than 2). So

$$0 = |\partial C|_2 = |f_0\sigma \cap f_0\tau|_2 + |f_1\sigma \cap f_1\tau|_2 + |F(\partial\sigma \times I) \cap F(\tau \times I)|_2 + |F(\sigma \times I) \cap F(\partial\tau \times I)|_2.$$

□

**Задача 6.8.8.** Пусть  $L$  — подкомплекс в 2-комплексе  $K$ , и  $f : K \rightarrow B^4$  — собственное PL отображение общего положения, для которого  $f|_L : L \rightarrow \partial B^4$  — вложение. Докажите, что

(а) если  $\sigma \subset L$ , то расстановка пересечений отображения  $f$  нулевая на  $\{\sigma, \tau\}$  для любого  $\tau$ .

(б) сумма расстановок пересечений таких отображений  $f, f' : K \rightarrow B^4$  равна сумме некоторого числа элементарных кограниц пар  $(\alpha, \sigma)$  непересекающихся  $(k-1)$ - и  $k$ -мерных граней, ни одна из которых не лежит в  $L$ .

**Задача 6.8.9.** \* PL отображение  $f : K \rightarrow \mathbb{R}^d$  общего положения комплекса  $K$  размерности менее  $d$  называется  $\mathbb{Z}_2$ -вложением, если  $f$ -образы любых двух несмежных граней, сумма размерностей которых равна  $d$ , пересекаются в четном числе точек.

PL отображение  $f : K \rightarrow \mathbb{R}^d$  общего положения комплекса  $K$  называется  $\mathbb{Z}_2$ -вложением, если  $|\sigma \cap f^{-1}f\tau|$  четно для любых двух несмежных граней  $\sigma, \tau$ , сумма размерностей которых равна  $d$ , и размерность первой из которых положительна.

(а) Граница  $(k+1)$ -симплекса не является  $\mathbb{Z}_2$ -вложимой в  $\mathbb{R}^k$ .

Эта  $\mathbb{Z}_2$ -версия топологической теоремы Радона 7.2.1 следует из замечания 7.2.3.d.

(б) Для любых  $k$  и  $d$  существует полиномиальный алгоритм распознавания  $\mathbb{Z}_2$ -вложимости  $k$ -комплексов в  $\mathbb{R}^d$ . (Начните с  $k = 2$  и  $d \leq 3$ .)

(с) Постройте 2-комплекс, PL невложимый в  $\mathbb{R}^3$ , но  $\mathbb{Z}_2$ -вложимый в  $\mathbb{R}^3$ .

(д) Пусть  $f : K \rightarrow \mathbb{R}^3$  — PL отображение общего положения 2-комплекса  $K$ . Обозначим через  $\widehat{K}$  множество пар  $(\sigma, e)$  из несмежных двумерной грани  $\sigma$  и ребра  $e$ . Поставим

в соответствие паре  $(\sigma, e)$  вычит  $|f\sigma \cap fe|_2$ . **Расстановкой пересечений** отображения  $f$  называется полученное отображение  $\widehat{K} \rightarrow \mathbb{Z}_2$ , или соответствующее подмножество в  $\widehat{K}$ . (Отображения  $\widehat{K} \rightarrow \mathbb{Z}_2$  будем отождествлять с подмножествами в  $K^*$ , состоящими из пар, переходящих в  $1 \in \mathbb{Z}_2$ .)

**Элементарной кограницей** пары  $(\sigma, A)$  из двумерной грани и не лежащей в ней вершины называется подмножество  $\delta(\sigma, A) \subset \widehat{K}$ , состоящее из всех пар  $(\sigma, e)$  с  $e \in A$ .

**Элементарной кограницей** пары  $(e, e')$  непересекающихся ребер называется подмножество  $\delta(e, e') \subset \widehat{K}$ , состоящее из всех пар  $(\sigma, e)$  с  $\sigma \supset e'$ .

Тогда сумма расстановок пересечений разных PL отображений общего положения одного 2-комплекса в  $\mathbb{R}^3$  равна сумме некоторого числа элементарных кограниц.

*Замечание.* Аналогично предыдущему и замечанию 1.7.4 строится *препятствие Ван Кампена*  $v(K) \in H^d(K^*)$  к  $\mathbb{Z}_2$ -вложимости комплекса  $K$  в  $\mathbb{R}^d$ . Аналогично замечанию 2.4.1 формулируется и доказывается равенство  $v_d(K) = v_1(K)^d$ .

(e) *Generalized  $\mathbb{Z}_2$ -Menger conjecture.* Suppose that complexes  $K$  and  $L$  are not  $\mathbb{Z}_2$ -embeddable to  $\mathbb{R}^m$  and in  $\mathbb{R}^n$ , respectively,  $m > \dim K$  and  $n > \dim L$ . Then  $K \times L$  is not  $\mathbb{Z}_2$ -embeddable to  $\mathbb{R}^{m+n}$ .

Это связано со следующей алгебраической проблемой Менгера [Pa20, Conjecture 2]: *Комплексы  $K, L$  имеют нетривиальные препятствия ван Кампена ко вложимости в  $\mathbb{R}^m$  и  $\mathbb{R}^n$ , соответственно (см. определение например в [Sk18, §1.5]). Имеет ли  $K \times L$  нетривиальное препятствие ван Кампена ко вложимости в  $\mathbb{R}^{m+n}$ ?*

См. контрпример к аналогичной гипотезе для джойнов в [Pa21, Me22], ср. [Sk23].

## 6.9 Распознавание вложимости $k$ -комплексов в $\mathbb{R}^{2k}$

Теперь обобщим предыдущие рассуждения (пп. 1.5.4 и 6.8) до алгоритма распознавания вложимости. Доказательства утверждений этого пункта (кроме теорем 6.9.2.ab) аналогичны предыдущим.

**Знак** точки пересечения упорядоченной пары  $(a, b)$  ориентированных  $k$ -симплексов, вершины которых находятся в общем положении в  $\mathbb{R}^{2k}$ , равен  $+1$ , если для положительных базисов  $s_1, \dots, s_k$  и  $t_1, \dots, t_k$  в  $a$  и  $b$ , соответственно, базис  $s_1, \dots, s_k, t_1, \dots, t_k$  в  $\mathbb{R}^{2k}$  является положительным. Знак равен  $-1$ , если этот базис является отрицательным.

Пусть даны PL отображения  $f, g : \Delta_k \rightarrow \mathbb{R}^{2k}$  ориентированного  $k$ -симплекса, находящиеся в общем положении друг относительно друга. Обозначим через  $f \cdot g$  сумму знаков точек пересечения их образов (ориентации в образах приходят из ориентации  $k$ -симплекса).

**Задача 6.9.1.** (a)  $f \cdot g = (-1)^k g \cdot f$ .

(b) Как меняется  $f \cdot g$  при изменении ориентации пространства  $\mathbb{R}^{2k}$ , т.е. при композиции отображений  $f, g$  с зеркальной симметрией?

(c) Как меняется  $f \cdot g$  при изменении ориентации  $k$ -симплекса для  $f$ , т.е. при прекомпозиции отображения  $f$  с зеркальной симметрией?

PL отображение  $f : K \rightarrow \mathbb{R}^{2k}$  общего положения  $k$ -комплекса  $K$  называется  **$\mathbb{Z}$ - (почти) вложением**, если для любых двух непересекающихся  $k$ -мерных граней сумма знаков точек пересечения их  $f$ -образов равна нулю, для некоторых (или, эквивалентно, для любых) ориентаций на этих гранях.

**Теорема 6.9.2.** (a) (Ван Кампен-Шапиро-Бу) *Комплекс размерности  $k \neq 2$  PL вложим в  $\mathbb{R}^{2k}$  тогда и только тогда, когда он  $\mathbb{Z}$ -вложим в  $\mathbb{R}^{2k}$ .*

(b) (Фридман-Крушкаль-Тайхнер) *Существует 2-комплекс, PL (даже TOP) не вложимый в  $\mathbb{R}^4$ , но  $\mathbb{Z}$ -вложимый в  $\mathbb{R}^4$ .*

Теорема 6.9.2.a не доказывается в этом тексте, см. доказательство, например, в [Sk06, §4]. набросок доказательства теоремы 6.9.2.b приведен в п. 6.11. (Теорема 6.9.2.a для  $k = 1$  уже упоминалась в замечании 1.5.13.)

**Утверждение 6.9.3.** *Существует полиномиальный алгоритм распознавания  $\mathbb{Z}$ -вложимости  $k$ -комплексов в  $\mathbb{R}^{2k}$ .*

Это следует из утверждения 6.9.5.b аналогично п. 1.5. Для формулировки утверждения 6.9.5.b, т.е. для построения алгоритма, нужны следующие определения.

Для PL отображения  $f : K \rightarrow \mathbb{R}^{2k}$  общего положения  $k$ -комплекса  $K$  поставим в соответствие упорядоченной паре  $(\sigma, \tau)$  ориентированных  $k$ -мерных граней число  $f\sigma \cdot f\tau$  точек их пересечения со знаком. Обозначим через  $\tilde{K}$  множество *упорядоченных* пар непересекающихся ориентированных  $k$ -мерных граней комплекса  $K$ . Тогда получено отображение  $\tilde{K} \rightarrow \mathbb{Z}$ . Назовем его **целочисленной расстановкой** (или **коциклом пересечений**). Оно симметрично при четном  $k$  и кососимметрично при нечетном  $k$ .

Ясно, что расстановка пересечений нулевая для любого  $\mathbb{Z}$ -вложения.

При  $2k$ -мерном аналоге преобразования Райдемайстера на рис. 1.5.1.V к расстановке пересечений добавляется **элементарная** (целочисленная) **кограница** пары  $(\alpha, \sigma)$  ориентированных непересекающихся  $(k-1)$ - и  $k$ -мерных граней. Она определяется аналогично случаю  $k = 1$  (п. 1.5.4). Приведем детали.

Let  $\alpha$  be an oriented  $(k-1)$ -face of  $K$  which is not contained in the boundary of a  $k$ -face  $\sigma$  of  $K$ . An (integer) **elementary coboundary** of the pair  $(\alpha, \sigma)$  is the map  $\delta(\alpha, \sigma) : \tilde{K} \rightarrow \mathbb{Z}$  assigning

$$(-1)^k[\tau : \alpha] \text{ to } (\sigma, \tau), \quad [\tau : \alpha] \text{ to } (\tau, \sigma) \quad \text{and} \quad 0 \text{ to any other pair.}$$

where the *incidence coefficient*  $[\tau : \alpha]$  is defined e.g. in [HG, §3].

**Задача 6.9.4** (Ср. с утверждением 6.8.4). Пусть даны  $k$ -комплекс  $K$  и его непересекающиеся ориентированные  $(k-1)$ - и  $k$ -мерные грани  $\alpha$  и  $\sigma$ . Тогда для любого PL отображения  $f : K \rightarrow \mathbb{R}^{2k}$  общего положения существует PL отображение  $f' : K \rightarrow \mathbb{R}^{2k}$  общего положения, для которого разность (целочисленных) расстановок пересечений для  $f$  и для  $f'$  равна  $\delta(\alpha, \sigma)$ .

**Когомологичность** (целочисленная) расстановок  $\tilde{K} \rightarrow \mathbb{Z}$ , определяется аналогично случаю  $k = 1$  (п. 1.5.4). Cocycles  $\nu, \nu' : \tilde{K} \rightarrow \mathbb{Z}$  are called **cohomologous** if

$$\nu - \nu' = c_1\delta(\alpha_1, \sigma_1) + \dots + c_k\delta(\alpha_k, \sigma_k)$$

for some integers  $c_1, \dots, c_k \in \mathbb{Z}$ ,  $(k-1)$ -faces  $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ , and  $k$ -faces  $\sigma_1, \dots, \sigma_k$  (not necessarily distinct). Observe that change of the orientation of  $\alpha$  forces change of the sign of  $\delta(\alpha, \sigma)$ . Hence the cohomology equivalence relation does not depend on the orientations of  $(k-1)$ -faces.

**Задача 6.9.5** (cf. Lemma 6.8.6 and Propositions 6.8.7, 1.5.12). (a) Расстановки пересечений разных PL отображений общего положения одного  $k$ -комплекса в  $\mathbb{R}^{2k}$  когомологичны.

(b) Комплекс размерности  $k$  является  $\mathbb{Z}$ -вложимым в  $\mathbb{R}^{2k}$  тогда и только тогда, когда целочисленная расстановка пересечений некоторого (или, эквивалентно, любого) его отображения общего положения в  $\mathbb{R}^{2k}$  когомологична нулевой расстановке.

(c) Удвоенная целочисленная расстановка пересечений любого PL отображения общего положения  $k$ -комплекса в  $\mathbb{R}^{2k}$  когомологична нулевой расстановке.

## 6.10 Almost embeddings, $\mathbb{Z}_2$ - and $\mathbb{Z}$ -embeddings

A map  $f : K \rightarrow Y$  of a complex  $K$  to a subset  $Y \subset \mathbb{R}^d$  is called an *almost embedding* if the images of non-adjacent faces are disjoint, i.e. if  $f\sigma \cap f\tau = \emptyset$  for any non-adjacent faces  $\sigma, \tau$ .

This notion naturally appears in geometric topology (studies of embeddings), in combinatorial geometry (Helly-type results on convex sets), and in topological combinatorics (topological Radon and Tverberg theorems), see [FKT, §4], [Mat97, GPP+] and surveys [Sk16, §1], [Sk06]. The notions of  $\mathbb{Z}_2$ - and  $\mathbb{Z}$ -embedding (defined in §§6.8,6.9) naturally appear in studies of embeddings. The notion of a  $\mathbb{Z}_2$ -embedding (a.k.a. *Hanani-Tutte* drawing) is most actively studied for graph drawings on surfaces, see survey [Sc13] and [SS13, FK19, Bi21].

Some proofs of the non-embeddability of complexes into  $\mathbb{R}^d$  actually show that these complexes are not almost embeddable to  $\mathbb{R}^d$ , are not  $\mathbb{Z}_2$ - or  $\mathbb{Z}$ -embeddable to  $\mathbb{R}^d$  for  $d = 2k$ . This is so e.g. for the boundary of  $(d + 1)$ -simplex (the non-almost embeddability is the topological Radon Theorem 7.2.1), as well as for the  $k$ -complex  $\Delta_{2k+2}^k$  and  $d = 2k$ . See e.g. surveys [Sk18, §§1.4, 2.2], [Sk14, Theorem 1.4] and [KS21, Remark 1.2.d]. On the other hand, some constructions of embeddings have constructions of almost or  $\mathbb{Z}$ -embeddings as a convenient intermediate step allowing to structure the proof, and to describe relation to known results and methods.

**Теорема 6.10.1.** (a) *A complex of dimension  $k \neq 2$  is embeddable into a simply connected  $2k$ -manifold  $M$  if and only if the complex is  $\mathbb{Z}$ -embeddable to  $M$ . (See [vK32, Sh57, Wu58] and also [Ha69, Jo02]. Cf. Theorem 6.9.2.a.)*

(b) *There is a 2-complex  $\mathbb{Z}$ -embeddable but not almost embeddable to  $\mathbb{R}^4$ . (See [FKT, §3.2, §3.3, §4], [AMS+, Theorem 1.6], [Al22].)*

(c) *There is a 2-complex almost embeddable but not PL embeddable to  $\mathbb{R}^4$  [SSS, Example in p. 338].*

*Comments on the proof of (a).* Clearly, an embedding is a  $\mathbb{Z}$ -embedding. Let us discuss the converse implication.

For  $k = 1$  part (a) follows by the Hanani-Tutte Theorem, see survey [Sk18, Theorem 1.5.3] (because a compact simply connected 2-manifold is a sphere).

Assume that  $k \geq 3$ . For  $M = \mathbb{R}^{2k}$  part (a) is proved in [vK32, Sh57, Wu58]; for a simple exposition see [FKT, §2], [Sk06, §4]. The general case is proved in the same way, just note that in [FKT, Lemma 4, 5 and application of the Whitney trick in the proof of Theorem 3]  $\mathbb{R}^{2k}$  could be replaced by  $M$ . See details in [Jo02, Corollary 2 and Theorem 4]. The proofs of [Jo02] mentioned here are written for ‘smooth’ maps of complexes but work for PL maps.  $\square$

The analogue of Theorem 6.10.1.a for  $k = 1$  and non-simply connected manifolds (i.e. for manifolds distinct from the 2-disk and the 2-sphere) states that *if a graph has a  $\mathbb{Z}$ -embedding on a surface, then it has an embedding into that surface*. This is unknown. The analogue with ‘ $\mathbb{Z}$ -embedding’ replaced by ‘almost embedding’ is also unknown. The analogue with ‘ $\mathbb{Z}$ -embedding’ replaced by ‘ $\mathbb{Z}_2$ -embedding’ is wrong [FK19] (see also [FPS]).

Theorem 6.9.2.b follows from Theorem 6.10.1.b and the following remark.

**Замечание 6.10.2.** (a) Clearly, the property of being an almost embedding is preserved under sufficiently small perturbation of the map (as opposed to the property of being an embedding). Thus by approximation of continuous maps with PL maps we observe that for complexes in manifolds

- topological embeddability implies PL almost embeddability;
- a PL or topological embedding can be approximated by a general position PL almost embedding;
- PL almost embeddability is equivalent to topological almost embeddability.



Analogous remark and results holds with ‘almost’ replaced by ‘ $\mathbb{Z}_2$ -’ or by ‘ $\mathbb{Z}$ -’.

Cf. [DS22, Remark 1.3.c]; observe that [DS22, Remarks 1.3.bc] hold for any complexes, not necessarily skeleta of simplices.

(b) Studies of *embeddings* of  $k$ -complexes into  $2k$ -manifolds for  $k > 1$  are analogous to studies of  $\mathbb{Z}_2$ -*embeddings* (not embeddings) of graphs to surfaces. Indeed, Euler formula  $V - E + F = 2$  cannot be applied for  $\mathbb{Z}_2$ -embeddings of graphs to surfaces. Analogously, for  $k > 1$  a  $k$ -hyperplane in  $\mathbb{R}^{2k}$  does not split  $\mathbb{R}^{2k}$ , so an analogue of Euler formula is not available for  $k$ -complexes in  $2k$ -manifolds.

**Теорема 6.10.3.** (a) If  $d \leq \frac{3(k+1)}{2}$  and a  $k$ -complex almost embeds in  $\mathbb{R}^d$ , then the complex PL embeds in  $\mathbb{R}^d$ . (See [We67, Sk98] and survey [Sk06, §8]; cf. Theorem 6.6.1.)

(b) For every  $d, k$  such that  $k + 2 \leq d \leq \frac{3k}{2} + 1$  there is a  $k$ -complex almost embeddable in  $\mathbb{R}^d$  but not PL embeddable in  $\mathbb{R}^d$ .

(See [SSS, Example in p. 338]; cf. [SS92]. См. задачи 6.11.5, 6.11.6. Дальнейшее изложение идеи доказательства из [SSS] приведено в [Sk06, §7].)

(c) For every fixed  $d, k$  such that  $k + 2 \leq d \leq \frac{3k}{2} + 1$  the algorithmic problem of recognizing almost embeddability of  $k$ -complexes in  $\mathbb{R}^d$  is NP-hard. [ST17, Al22] (Cf. Theorem 6.6.3.)

See also Remarks 8.2.5.ab.

Is there a simplicial almost embedding  $K_3 \times K_2$  (with the standard triangulation) to  $\mathbb{R}^3$  which is not an embedding? Is there a triangulation of  $K_4 \times K_4$  which admits an almost embedding to  $\mathbb{R}^3$ ?

## 6.11 2-комплекс, невложимый в $\mathbb{R}^4$ , но $\mathbb{Z}$ -вложимый в $\mathbb{R}^4$

В этом пункте мы приведем идею доказательства теоремы 6.9.2.b — первого шага к теоремам 6.6.3 и 6.10.3.c об NP-трудности. Теорема 6.9.2.b вытекает из утверждений 6.11.3.a и 6.11.4.c. Утверждение 6.11.3.a основано на лемме 6.14.7.b о кольцах Борромео и «количественной» теореме ван Кампена-Флореса — лемме 6.7.3 для  $k = 2$  (ссылки на последнюю можно заменить ссылками на ее следствие — PL аналог утверждения 5.2.4).

**Задача 6.11.1.** Вложение «кольца Борромео»  $S^1 \sqcup S^1 \sqcup S^1 \rightarrow S^3$  продолжается до  $\mathbb{Z}$ -вложения  $D^2 \sqcup D^2 \sqcup D^2 \rightarrow D^4$ , но не продолжается до вложения  $D^2 \sqcup D^2 \sqcup D^2 \rightarrow D^4$ .

В этом и следующем пунктах обозначим через  $(ij)$  ребро с концами  $i$  и  $j$ , через  $(ijk)$  — грань комплекса, через  $(ijk)$  — ее внутренность, через  $\partial(ijk)$  — объединение ребер  $(ij), (jk), (ki)$ .

**Задача 6.11.2.** В этой задаче, формально не используемой в дальнейшем, мы предваряем четырехмерные рассуждения их трехмерным аналогом.

Обозначим  $K := 0 * K_5 \cup (06)$ . Обозначим через  $X$  комплекс, получающийся из 8-угольника склейкой сторон в соответствии со словом  $abc^{-1}a^{-1}cb^{-1}c^{-1}$ . Этот комплекс получается из тора склейкой дуг, лежащих на торе и имеющих общий конец. Его *меридианом*  $a$  и *параллелью*  $b$  назовем окружности, отвечающие буквам  $a$  и  $b$ , соответственно. Его *древком*  $c$  назовем отрезок, отвечающий букве  $c$ .

(a) Обозначим штрихом *копию* комплекса или его элемента. Комплекс

$$P := (K - (012)) \bigcup_{6=6'} (K' - (012)') \bigcup_{\partial(012)=a, \partial(012)'=b, [06] \cup [6'0'] = c} X.$$

(рис. 6.11.1) не PL вложим в  $\mathbb{R}^3$ . (Подсказка: используйте утверждение 6.14.6.b и аналог теоремы 4.2.9 Конвея-Гордона-Закса.)

(b) Комплекс  $(K - (012)) \bigcup_{\partial(012)=a} X$  не PL вложим в  $\mathbb{R}^3$ . (П. (b) показывает, что п.

(a) ценен лишь как трехмерное объяснение четырехмерной идеи.)

*Набросок доказательства утверждения 6.11.2.a.* Пусть, напротив,  $P$  PL вложим в  $\mathbb{R}^3$ . Будем рассматривать его как подмножество в  $\mathbb{R}^3$ , т.е. отождествим его с его образом. По теореме 4.2.9 Конвея-Гордона-Закса замкнутая ломаная  $\partial(345)$  зацеплена с меридианом  $\partial(012) = a$  комплекса  $X$ . Аналогично замкнутая ломаная  $\partial(345)'$  зацеплена с параллелью  $\partial(012)' = b$  комплекса  $X$ . По определению вложения ни одна из ломаных  $\partial(345)$  и  $\partial(345)'$  не пересекает комплекс  $X$ . Замкнутые ломаные  $\partial(345)$  и  $\partial(345)'$  ограничивают непересекающиеся диски  $\Delta := \overline{(034)} \cup \overline{(035)} \cup \overline{(045)}$  и  $\Delta'$ , соответственно. Так как  $\Delta \cap b = \emptyset$ , то  $\partial(345)$  не зацеплена по модулю 2 с  $b$ . Аналогично  $\partial(345)'$  не зацеплена по модулю 2 с  $a$ . Противоречие с аналогом утверждения 6.14.6.b.  $\square$

Обозначим через  $T$  тор, через  $a$  и  $b$  его меридиан и параллель. Тор триангулирован так, что  $a$  и  $b$  являются циклами длины 3 из ребер триангуляции.

**Задача 6.11.3.** Комплекс

$$Q = Q_{x_1 \vee \bar{x}_1} := (\Delta_6^2 - (012)) \bigcup_{0=0'} (\Delta_6^{2'} - (012)') \bigcup_{\partial(012)=a, \partial(012)'=b} T.$$

(a) не PL вложим в  $\mathbb{R}^4$ ; (b) не почти вложим в  $\mathbb{R}^4$  (а значит, не TOP вложим в  $\mathbb{R}^4$ ).

Для доказательства нужна лемма 6.14.7.bc о (сингулярных) кольцах Борромео. См. детали в доказательстве части «только тогда» леммы 6.12.2.

**Задача 6.11.4.** (a) Существует PL вложение  $(\Delta_6^2 - (012)) \bigcup_{0=0'} (\Delta_6^{2'} - (012)') \rightarrow \mathbb{R}^4$ .

(b) Существует  $\mathbb{Z}_2$ -вложение  $Q \rightarrow \mathbb{R}^4$ . (c) Существует  $\mathbb{Z}$ -вложение  $Q \rightarrow \mathbb{R}^4$ .

*Указание к п. (b).* Продолжите вложение из п. (a) до PL отображения  $f : Q \rightarrow \mathbb{R}^4$  общего положения. По лемме о четности  $|fT \cap f\partial(3456)| \equiv |fT \cap f\partial(3456)'| \equiv 0 \pmod{2}$ . Далее используйте «пальцевые движения» ван Кампена (утверждение 6.8.4).

*Набросок доказательства утверждения 6.11.2.b.* Пусть, напротив, комплекс PL вложим в  $\mathbb{R}^3$ . Будем рассматривать его как подмножество в  $\mathbb{R}^3$ , т.е. отождествим его с его образом. Замкнутая ломаная  $[345]$  ограничивает диск  $(034) \cup (045) \cup (045)$ . Этот диск пересекает тор в единственной точке 0. Дополнение диска до этой точки находится по одну сторону от тора. Тогда этот диск можно заменить на другой диск в  $\mathbb{R}^3$  с той же граничной окружностью  $[345]$ , который уже не пересекает тора. (Чтобы это строго доказать, можно рассмотреть маленькую сферу с центром в точке 0.) Значит, по лемме о четности ломаная  $[345]$  не зацеплена с параллелью  $[012]$  тора. Противоречие с теоремой Конвея-Гордона-Закса.  $\square$

**Задача 6.11.5.** (a) Чему гомеоморфно  $\mathbb{R}^4 - \mathbb{R}^2 \times 0 - 0 \times \mathbb{R}^2$ ?

(b) Чему гомеоморфно дополнение до зацепления Хопфа в  $\mathbb{R}^3$ ?

**Задача 6.11.6.** Take ‘standard’ embeddings  $f, g : D^2 \rightarrow B^4$  with disjoint images. There exist proper embeddings  $f', g', h' : D^2 \rightarrow B^4$  such that  $f = f'$  and  $g = g'$  on  $\partial D^2$ ,

$$h'S^1 \cap (fD^2 \cup gD^2) = h'D^2 \cap (f'D^2 \cup g'D^2) = \emptyset \neq f'D^2 \cap g'D^2,$$

and  $h'|_{S^1}$  is not null-homotopic in  $B^4 - (fD^2 \cup gD^2)$ .

## 6.12 NP-трудность проблемы вложимости комплексов

В этом пункте мы приведем идею доказательства теорем 6.6.3 и 6.10.3.с об NP-трудности.

Пусть имеется формула  $f$  для булевой функции, являющаяся дизъюнкцией конъюнкций переменных и их отрицаний. Пусть при этом в каждом «слагаемом» не более трех «сомножителей». Мы построим 2-комплекс  $Q_f$  со следующим свойством:  $Q_f$  вложим в  $\mathbb{R}^4$  тогда и только тогда, когда  $f \not\equiv 1$  (лемма 6.12.2). Более того, количество граней (всех размерностей) в комплексе  $Q_f$  является полиномом от количества переменных  $n$  в функции  $f$ , и построение комплекса  $Q_f$  по  $f$  реализуется полиномиальным по  $n$  алгоритмом. Этого достаточно для теоремы 6.6.3 об NP-трудности (при  $d = 2k = 4$ ). Для теоремы 6.10.3.с нужно дополнительно утверждение 6.12.4.

Начнем с частных случаев, отвечающих простым формулам  $f$ .

**Задача 6.12.1.** (а) Комплекс  $Q_{x_1} := (\Delta_6^2 - (012)) \bigcup_{\partial(012)=a} T$  PL вложим в  $\mathbb{R}^4$ .

(б) (Загадка) Почему не проходит доказательство невложимости комплекса  $Q_{x_1 \vee \bar{x}_1}$  в  $\mathbb{R}^4$  (утверждение 6.11.3.а) для следующего комплекса?

$$Q_{x_1 x_2 \vee \bar{x}_1} := Q_{x_1 \vee \bar{x}_1} - (013) = (\Delta_6^2 - (012) - (013)) \bigcup_{0=0'} (\Delta_6^{2'} - (012)') \bigcup_{\partial(012)=a, \partial(012)'=b} T.$$

(с)\* Комплекс  $Q_{x_1 x_2 \vee \bar{x}_1}$  PL вложим в  $\mathbb{R}^4$ .

(д) Следующий комплекс (рис. 6.12.1) не PL вложим в  $\mathbb{R}^4$ :

$$Q_{x_1 x_2 \vee \bar{x}_1 \vee \bar{x}_2} := (\Delta_6^2 - (012) - (013)) \bigcup_{0=0'} (\Delta_6^{2'} - (012)') \bigcup_{0=0''} (\Delta_6^{2''} - (013)'') \bigcup_{\substack{\partial(012)=a, \partial(012)'=b, \\ \partial(013)=a', \partial(013)''=b'}} T \cup T'.$$

Рис. 6.12.1: [www.mscme.ru/circles/oim/algorithm.pdf](http://www.mscme.ru/circles/oim/algorithm.pdf):  $Q_{x_1 x_2 \vee \bar{x}_1 \vee \bar{x}_2}$

(е) (загадка) Почему не проходит доказательство невложимости в  $\mathbb{R}^4$  из пункта (д) для следующего комплекса?

$$Q_{x_1 x_2 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_2} := (\Delta_6^2 - (012) - (013)) \bigcup_{0=0'} (\Delta_6^{2'} - (012)' - (013)') \bigcup_{\substack{\partial(012)=a, \partial(012)'=b, \\ \partial(013)=a', \partial(013)'=b'}} T \cup T'.$$

Рис. 6.12.2: [www.mscme.ru/circles/oim/algorithm.pdf](http://www.mscme.ru/circles/oim/algorithm.pdf):  $Q_{x_1 x_2 x_3 \vee \bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3}$

(ф) Следующий комплекс (рис. 6.12.2) не PL вложим в  $\mathbb{R}^4$ :

$$Q_{x_1 x_2 x_3 \vee \bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3} := (\Delta_6^2 - (012) - (013) - (014)) \bigcup_{0=0'} (\Delta_6^{2'} - (012)') \bigcup_{0=0''} (\Delta_6^{2''} - (013)'') \bigcup_{0=0'''} (\Delta_6^{2'''} - (014)''') \bigcup_{\substack{\partial(012)=a', \partial(012)'=b', \\ \partial(013)=a'', \partial(013)''=b'', \\ \partial(014)=a''', \partial(014)'''=b'''}} T' \cup T'' \cup T'''.$$

(г) Следующий комплекс не PL вложим в  $\mathbb{R}^4$ :

$$Q_{x_1 x_2 \vee x_1 \bar{x}_2 \vee \bar{x}_1} := (\Delta_6^2 - (012) - (013)) \bigcup_{0=0'} (\Delta_6^{2'} - (012)' - (013)') \bigcup_{0=0''} T.$$

$$\bigcup_{0=0''} (\Delta_6^{2''} - (012)'' ) \quad \bigcup_{\substack{\partial(012)=a, \partial(012)''=b, \\ \partial(012)'=a', \partial(012)''=b', \\ \partial(013)=a'', \partial(013)'=b''}} T \cup T' \cup T''.$$

Утверждения (d,f,g) доказываются аналогично невозможности комплекса  $Q_{x_1 \sqrt{x_1}}$ .

**Лемма 6.12.2.** Пусть дана формула

$$f(x_1, \dots, x_n) = \prod_{s=1}^m x_{p_s(2)}^{\alpha_s} x_{p_s(3)}^{\beta_s} x_{p_s(4)}^{\gamma_s}.$$

Здесь  $x^0 = \bar{x}$ ,  $x^1 = x$  и  $p_s : \{2, 3, 4\} \rightarrow [n]$  инъекции !!! Положим

$$Q_f := \bigcup_{0_1=0_2=\dots=0_m} (\Delta_6^2 - (012) - (013) - (014))_s \quad \bigcup_{\substack{\partial(01p_i^{-1}(k))_i=a_{ijk}, \\ \partial(01p_j^{-1}(k))_j=b_{ijk}}} \cup_{ijk} T_{ijk}.$$

Здесь индексы  $s$  и  $ijk$  означают номер копии, причем

- $s$  пробегает все целые числа от 1 до  $m$ ;
- $ijk$  пробегает все (упорядоченные) тройки  $(i, j, k) \in [m] \times [m] \times [n]$ , для которых в  $i$ -м слагаемом есть  $x_k$ , а в  $j$ -м есть  $\bar{x}_k$ ; такие тройки назовем конфликтными.

Комплекс  $Q_f$  PL вложим в  $\mathbb{R}^4$  тогда и только тогда, когда существует  $a \in \mathbb{Z}_2^n$ , для которого  $f(a) = 0$ .

**Задача 6.12.3.** В обозначениях леммы 6.12.2 если  $f \equiv 1$ , то существует

(а) конфликтная тройка  $ijk$ .

(б) конфликтная тройка  $ijk$ , для которой  $x_k$  и  $\bar{x}_k$  стоят на первом месте (т.е.  $p_i(2) = p_j(2) = k$ ).

*Указание.* Так как  $f \equiv 1$ , то для любого выбора одного сомножителя из каждого «слагаемого» найдутся два сомножителя  $x_k$  и  $\bar{x}_k$  среди выбранных.

*Доказательство части «только тогда» леммы 6.12.2.* Пусть, напротив,  $f \equiv 1$  и  $Q_f$  вложим в  $\mathbb{R}^4$ . Будем рассматривать  $Q_f$  как подмножество в  $\mathbb{R}^4$ , т.е. отождествим его с его образом. По лемме 6.7.3 (или по ее следствию — PL аналогу утверждения 5.2.4) можно считать, что для любого  $s \in [m]$  сфера  $\partial(3456)_s$  и замкнутая ломаная  $\partial(012)_s$  зацеплены по модулю 2 (того, чтобы именно они были зацеплены, можно добиться, перенумеровав вершины  $2_s, 3_s, 4_s$ ). По утверждению 6.12.3 существует конфликтная тройка  $ijk$ , для которой  $x_k$  и  $\bar{x}_k$  стоят на первом месте. Для  $\{s, s'\} = \{i, j\}$  замкнутая ломаная  $\partial(012)_s$  ограничивает диск  $(015)_s \cup (125)_s \cup (025)_s$ , не пересекающий сферу  $\partial(3456)_{s'}$ . Противоречие с леммой 6.14.7.b о кольцах Борромео для сфер  $\partial(3456)_i, \partial(3456)_j$  и тора  $T_{ijk}$ .  $\square$

Доказательство части «тогда» иллюстрируется утверждениями 6.12.1.ас и приводится в [MTW].

**Задача 6.12.4.** В обозначениях леммы 6.12.2 если комплекс  $Q_f$  почти вложим в  $\mathbb{R}^4$ , то существует  $a \in \mathbb{Z}_2^n$ , для которого  $f(a) = 0$ .

## 6.13 Вложимость комплексов в плоскость

**Теорема 6.13.1** (Halin-Jung, [HJ64]). Следующие условия на 2-комплекс  $K$  равносильны:

(i)  $K$  PL вложим в плоскость;

(ii) никакое подразбиение комплекса  $K$  не содержит подразбиений графа  $K_5$ , графа  $K_{3,3}$ , кнопки  $K_{VI}$  или сферы  $S^2$  (рис. 6.3.1).

(iii)  $K$  не содержит подразбиений комплексов, изображенных на рис. 6.3.1.

Импlications  $(i) \Rightarrow (ii)$ ,  $(i) \Rightarrow (iii)$  и  $(ii) \Rightarrow (iii)$  очевидны. Импликация  $(iii) \Rightarrow (i)$  доказана в [HJ64]. Ниже доказана импликация  $(ii) \Rightarrow (i)$ . Видимо, приводимое доказательство является фольклорным, см. [Sk05]. Оно проще доказательства импликации  $(iii) \Rightarrow (i)$  в [HJ64].

*Набросок доказательства импликации  $(ii) \Rightarrow (i)$ .* Достаточно доказать импликацию для связных 2-комплексов. Пусть связный 2-комплекс  $N \not\cong S^2$  не содержит ни графов  $K_5$ ,  $K_{3,3}$ , ни зонтика  $K_{VI}$ . Так как  $N$  не содержит зонтика, то окрестность любой точки в  $N$  является объединением дисков и отрезков, склеенных за одну точку (рис. 6.13.1 слева).

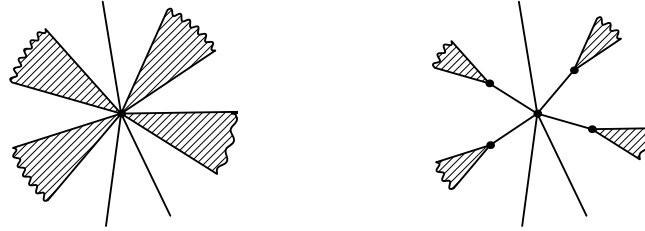


Рис. 6.13.1: Преобразование окрестности точки

Если этих дисков больше одного, то заменим эту окрестность на изображенную на рис. 6.13.1 справа. При этом преобразовании не появятся подграфов  $K_5$  и  $K_{3,3}$ . Обратное преобразование является стягиванием «звезды с несколькими лучами» и поэтому сохраняет планарность. Значит, достаточно доказать теорему для полученного 2-комплекса  $N'$ . Обозначим через  $\bar{N}$  объединение его двумерных граней. Тогда окрестность любой точки в  $\bar{N}$  является диском (см. формализацию в начале задачи 6.14.1). Значит, по теореме классификации 2-многообразий [Sk20, §5.1]  $\bar{N}$  является сферой с ручками, пленками Мебиуса и дырками. Поскольку каждый из графов  $K_5$  и  $K_{3,3}$  вложим и в тор с дыркой, и в лист Мебиуса, то  $\bar{N}$  есть несвязное объединение дисков с дырками.

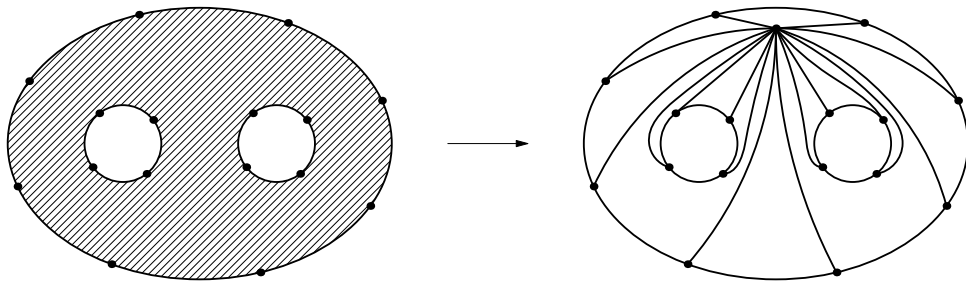


Рис. 6.13.2: Преобразование диска с дырками

Заменим каждый из этих дисков с дырками на граф с рис. 6.13.2. Поскольку  $N'$  не содержит графов  $K_5$  и  $K_{3,3}$ , то и в полученном заменой графе  $\hat{N}$  их нет. Значит, по теореме Куратовского 1.2.3.e граф  $\hat{N}$  планарен. По вложению графа  $\hat{N}$  в плоскость легко построить вложение 2-комплекса  $N'$  в плоскость.  $\square$

## 6.14 Вложения и зацепленность в пространстве

**Задача 6.14.1.** *Триангуляцией 2-многообразия* называется 2-комплекс, любое ребро которого содержится в некоторой грани и для любой вершины  $v$  которого все грани, ее содержащие, образуют «цепочку»

$$\{v, a_1, a_2\}, \{v, a_2, a_3\} \dots \{v, a_{n-1}, a_n\} \quad \text{или} \quad \{v, a_1, a_2\}, \{v, a_2, a_3\} \dots \{v, a_{n-1}, a_n\}, \{v, a_n, a_1\}$$

для некоторых попарно различных вершин  $a_1, \dots, a_n$ . Если для всех  $v$  имеет место второй случай, то триангуляция 2-многообразия называется *замкнутой*.

(а) Если связная триангуляция 2-многообразия либо незамкнута, либо ориентируема то она PL вложима в  $\mathbb{R}^3$ . (См. определение ориентируемости в [Sk20, §5], ср. с рис. 4.3.1. Используйте теорему классификации триангуляций 2-многообразий [Sk20, §5].)

(б) Любая триангуляция 2-многообразия PL вложима в  $\mathbb{R}^4$ .

(с) Никакая замкнутая неориентируемая триангуляция 2-многообразия не является PL вложимой в  $\mathbb{R}^3$ .

Примеры из утверждения 6.14.1.с (или 6.1.4) дают бесконечное семейство 2-комплексов, не являющихся PL вложимыми в  $\mathbb{R}^3$ , ни один из которых не содержит другой.

Обобщение на вложимость в *трехмерные многообразия* см. в §10.

**Задача 6.14.2.** (а) При любом PL вложении ленты Мебиуса в  $\mathbb{R}^3$  ее край зацеплен по модулю 2 со средней линией.

(б) При любом PL вложении бутылки Клейна с дыркой в  $\mathbb{R}^3$  ее край зацеплен по модулю 2 с некоторой замкнутой кривой на бутылке Клейна.

(с) При любом PL вложении в  $\mathbb{R}^3$  неориентируемой поверхности, край которой является одной окружностью, ее край зацеплен по модулю 2 с любой из тех замкнутых кривых на поверхности при обходе вдоль которой меняется ориентация.

(д) \* При любом PL вложении в  $\mathbb{R}^7$  дополнения пространства  $\mathbb{R}P^4$  до внутренности четырехмерного шара краевая 3-сфера зацеплена по модулю 2 с  $\mathbb{R}P^3 \subset \mathbb{R}P^4$ .

**Утверждение 6.14.3** ([Pa20, Theorem 1], see also [Sk18o, Theorem 1]). *Let  $L$  be a graph such that the join  $L * [3]$  (i.e., the union of three cones over  $L$  along their common bases) PL embeds into  $\mathbb{R}^4$ . Then  $L$  admits a PL embedding into  $\mathbb{R}^3$  such that any two disjoint cycles have zero linking number.*

*Доказательство.* Consider  $L * [3]$  as a subcomplex of some triangulation of  $\mathbb{R}^4$ . Then there is a small general position 4-dimensional PL ball  $\Delta^4$  containing the point  $\emptyset * 1 \in \mathbb{R}^4$ . Hence the intersection  $\partial\Delta^4 \cap (L * [3])$  is PL homeomorphic to  $L$ . Let us prove that this very embedding of  $L$  into the 3-dimensional sphere  $\partial\Delta^4$  satisfies the required property.

Take any two disjoint oriented closed polygonal lines  $a, b \subset \partial\Delta^4 \cap (L * [3]) \cong L$ . Then  $(a * \{1, 2\}) - \text{Int } \Delta^4$  and  $(b * \{1, 3\}) - \text{Int } \Delta^4$  are two disjoint 2-dimensional PL disks in  $\mathbb{R}^4 - \Delta^4$  whose boundaries are  $a$  and  $b$ . Hence  $a$  and  $b$  have zero linking number in the 3-dimensional sphere  $\partial\Delta^4$  (by Lemma 5.4.1.b applied to  $\mathbb{R}^4 - \text{Int } \Delta^4$  instead of  $\mathbb{R}_+^4$ ).  $\square$

**Замечание 6.14.4.** (а) Proposition 6.14.3 trivially generalizes to a  $d$ -dimensional finite simplicial complex  $L$  and embeddings  $L * [3] \rightarrow \mathbb{R}^{2d+2}$ ,  $L \rightarrow \mathbb{R}^{2d+1}$ . For  $d \neq 2$  and a  $d$ -complex  $L$  embeddability of  $L * [3]$  into  $\mathbb{R}^{2d+2}$  even implies embeddability of  $L$  into  $\mathbb{R}^{2d}$ . For the case  $d = 1$  considered in Proposition 6.14.3 this improvement follows from a theorem of Grünbaum [Gr69] (whose proof is more complicated). For the case  $d \geq 3$  this improvement is proved in [MS06, (iv)  $\Rightarrow$  (i) of Corollary 4.4], [Pa20], [PS20].

(б) The above proof of Theorem 6.14.3 is analogous to [Sk03, Example 2] where a relation between intrinsic linking in 3-space and non-realizability in 4-space was found and used. Although the proof is simple, it easily generalizes to non-trivial results like a simple solution of the Menger 1929 conjecture and its generalizations [Sk03, Example 2, Lemmas 2 and 1'], see survey [Sk14].

**Пример 6.14.5.** (а) (Artin, 1925) *Существует PL вложение  $S^2 \rightarrow \mathbb{R}^4$ , не изотопное стандартному.*

*Hint: rotate  $\mathbb{R}_+^3 \subset \mathbb{R}^4$  around  $\mathbb{R}^1 \subset \mathbb{R}_+^3$ .*

(b) (Rolfsen, 1975) Существует PL вложение  $S^2 \sqcup S^2 \rightarrow \mathbb{R}^4$ , не изотопное вложению, образы компонент при котором лежат в непересекающихся шарах, и сужения которого на компоненты изотопны стандартным вложениям. (Их коэффициент зацепления равен нулю, ибо  $H_2(\mathbb{R}^4 - f(S^2); \mathbb{Z}) = 0$ .)

**Замечание 6.14.6.** (a) Следующее утверждение (b) показывает, что пересечение тора с одним из колец Борромео в построении колец Борромео при помощи тора (§4.7) не случайно. Утверждения (b,c), вместе со своими маломерным и многомерным аналогами (утверждениями 2.4.2 и 6.14.7) иллюстрируют одну из идей доказательства теоремы об NP трудности 6.6.3.

(b) В пространстве даны PL вложенные тор и непересекающиеся диски  $D_a, D_b$ , для которых

- $D_b$  не пересекает параллели тора, а  $D_a$  — меридиана,
- $\partial D_a$  зацеплено по модулю 2 с параллелью тора, а  $\partial D_b$  с меридианом.

Тогда тор пересекает объединение границ дисков.

(c) В пространстве даны PL вложенный тор и пересекающиеся ровно в одной точке замкнутые ломаные  $S_a, S_b$ , для которых

- $S_a$  не зацеплена по модулю 2 с меридианом тора, а  $S_b$  — с параллелью;
- $S_a$  зацеплена по модулю 2 с параллелью тора, а  $S_b$  — с меридианом.

Тогда тор пересекает объединение ломаных.

(d) В построении примера 4.7.1.a построены непересекающиеся замкнутые ломаные  $S_a, S_b$ , не пересекающие стандартный тор, для которых выполнены четыре свойства из утверждения (b) (можно достроить диски, для которых выполнены четыре свойства из утверждения (c)). Поэтому аналог утверждения (c) неверен с заменой условия «пересекающиеся ровно в одной точке» на «непересекающиеся». Но аналог с заменой этого условия на «непересекающихся не зацепленные» верен.

(e) Простое доказательство утверждений (b,c) можно получить аналогично утверждению 2.4.2, см. [AMS+]. Приведем идею более сложного доказательства, использующего фундаментальную группу (утверждение (c) доказывается аналогично с использованием теоремы Столлинга о нижнем центральном ряде группы [FKT, Lemma 7]).

Если бы в утверждении (b) ни  $\partial D$ , ни  $\partial D'$  не пересекали тор, то кривую  $X$  на торе, близкую к границе квадрата, полученного из тора разрезанием по параллели и меридиану, можно было стянуть с  $\partial D \cup \partial D'$  по тору. Но это невозможно аналогично доказательству нерасцепляемости в примере 4.7.1.a.

*Идея доказательства утверждения (b).* Так как диски  $D, D'$  кусочно-линейно вложены и не пересекаются, то зацепление  $\partial D \sqcup \partial D'$  изотопно стандартному. Поэтому группа  $\pi_1(\mathbb{R}^3 - \partial D \sqcup \partial D')$  изоморфна свободной группе с двумя образующими. Так как параллель тора не пересекает  $D'$  и зацеплена по модулю 2 с  $\partial D$ , то параллель представляет нечетную степень одной из образующих. Аналогично меридиан тора представляет нечетную степень другой образующей. Обозначим через  $S$  кривую на торе, близкую к границе квадрата, полученного из тора разрезанием по параллели и меридиану. Окружность  $S$  представляет коммутатор этих образующих, который не равен единице. Но  $S$  гомотопна нулю в торе. Поэтому он пересекает либо  $\partial D$ , либо  $\partial D'$ .

**Задача 6.14.7.** Обозначим через  $a := S^1 \times 1$  параллель тора и через  $b := 1 \times S^1$  меридиан тора. Пусть  $f : S^1 \times S^1 \sqcup S_a^2 \sqcup S_b^2 \rightarrow \mathbb{R}^4$  PL отображение, при котором образы множеств  $a \cup b$  и  $S_a^2 \sqcup S_b^2$  не пересекаются. Для  $x, y \in \{a, b\}$  обозначим через  $(xy)$  свойство « $fS_x^2$  зацеплена по модулю 2 с  $fy$ ».

(a) В  $\mathbb{R}^4$  существуют попарно непересекающиеся PL вложенные тор и сферы  $S_a, S_b$ , для которых выполнено свойство (aa) и не выполнены свойства (ab), (ba).

(b) (лемма о кольцах Борромео) Если для PL вложенного тора и непересекающихся PL вложенных сфер  $S_a^2, S_b^2$  в  $\mathbb{R}^4$ , ни одна из которых не пересекает объединение параллели и меридиана, выполнены свойства (aa), (bb) и не выполнены свойства (ab), (ba), то тор пересекает объединение сфер.

(c) (лемма о сингулярных кольцах Борромео) Не существует PL отображения  $f : S^1 \times S^1 \sqcup S_a^2 \sqcup S_b^2 \rightarrow \mathbb{R}^4$ , при котором образы компонент попарно не пересекаются, выполнены свойства (aa), (bb) и не выполнены свойства (ab), (ba).

(d) То же, что в (b) и (c), без свойства (ba).

(e) То же, что в (c), для PL отображения  $f : S^1 \times S^1 \sqcup S_a^2 \vee S_b^2 \rightarrow \mathbb{R}^4$ , при котором  $f(S^1 \times S^1) \cap f(S_a^2 \vee S_b^2) = \emptyset$  и  $f(S_a^2) \cap f(S_b^2)$  состоит из образа общей точки сфер.

Леммы (b,c) доказываются аналогично утверждению 2.4.2, см. детали в [AMS+, §2.2] (ср. с замечанием 6.14.6). Они важны для доказательства теорем 6.6.3 и 6.10.3.c об NP-трудности проблемы (почти) реализуемости гиперграфов в  $\mathbb{R}^d$ .

## 6.15 On the number of faces in a $k$ -subcomplex of $2k$ -space

The following Theorem 6.15.1.a is a higher-dimensional generalization of upper estimation on the number of edges in a planar graph.

An embedding of a simplicial complex into  $\mathbb{R}^{2d+1}$  is called **linkless** if the images of any two  $d$ -dimensional spheres have zero linking number.

**Теорема 6.15.1.** (*S. Parsa*) (a) For every  $d$  there is  $C$  such that for every  $n$  every  $d$ -complex having  $n$  vertices and embeddable into  $\mathbb{R}^{2d}$  contains less than  $Cn^{d+1-3^{1-d}}$  simplices of dimension  $d$ .

(b) For every  $d$  there is  $C$  such that for every  $n$  every  $d$ -complex having  $n$  vertices and linklessly embeddable into  $\mathbb{R}^{2d+1}$  contains less than  $Cn^{d+1-4^{1-d}}$  simplices of dimension  $d$ .

The result (a) improves analogous result with  $Cn^{d+1-3^{-d}}$  [De93] and is covered by the Grünbaum-Kalai-Sarkaria conjecture (whose proof is announced in [Ad18]; see [Sk21d, Example 3.1]). See [Pa20, Theorems 3 and 4].

By Proposition 6.5.3.b the  $d+1$  join power  $[3]^{*(d+1)} = [3] * \dots * [3]$  ( $d+1$  copies of  $[3]$ ) is not (PL or topologically) embeddable into  $\mathbb{R}^{2d}$ . The  $d+1$  join power  $[4]^{*(d+1)}$  is not linklessly embeddable into  $\mathbb{R}^{2d+1}$  [Sk03, Lemma 1] (we have  $[4]^{*2} = K_{4,4}$ , so the case  $d=1$  is due to Sachs). Theorem 6.15.1 is implied by these results and the following theorem.

**Теорема 6.15.2.** For every  $d, r$  there is  $C$  such that for every  $n$  every  $d$ -complex having  $n$  vertices and not containing a subcomplex homeomorphic to  $[r]^{*(d+1)}$  contains less than  $Cn^{d+1-r^{1-d}}$  simplices of dimension  $d$ .

Proof of Theorem 6.15.2 is based on the following lemma similar to the estimation of the number of edges in a graph not containing  $K_{s+1,a}$  (Kovari-Sos-Turán Theorem).

**Лемма 6.15.3.** For every integers  $r, m, a, s$  and subsets  $S_1, \dots, S_m \subset [a]$  every whose  $r$ -tuple intersection contains at most  $s$  elements we have

$$|S_1| + \dots + |S_m| \leq r(ma^{1-1/r} s^{1/r} + a).$$

The case  $r=3$  of Theorem 6.15.2 and of Lemma 6.15.3 is essentially proved in [Pa20]. The case of arbitrary  $r$  is analogous.



*Proof of Lemma 6.15.3.* Denote by  $d_q$  the number of subsets among  $S_1, \dots, S_m$  containing element  $q \in [a]$ . We may assume that there is  $\nu \leq a$  such that  $d_q \geq r$  when  $q \leq \nu$  and  $d_q < r$  when  $q > \nu$ . Then the required inequality follows by

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^m |S_j| &= \sum_{q=1}^a d_q < ra + \sum_{q=1}^{\nu} d_q \quad \text{and} \\ \left( \sum_{q=1}^{\nu} d_q \right)^r &\stackrel{(1)}{\leq} \nu^{r-1} \sum_{q=1}^{\nu} d_q^r \stackrel{(2)}{\leq} r^r \nu^{r-1} \sum_{q=1}^{\nu} \binom{d_q}{r} \leq r^r a^{r-1} \sum_{q=1}^a \binom{d_q}{r} \stackrel{(3)}{=} \\ &\stackrel{(3)}{=} r^r a^{r-1} \sum_{\{j_1, \dots, j_r\}} |S_{j_1} \cap \dots \cap S_{j_r}| \stackrel{(4)}{\leq} r^r a^{r-1} s \binom{m}{r} < r^r m^r a^{r-1} s. \end{aligned}$$

Here

- the inequality (1) is the inequality between the arithmetic mean and the degree  $r$  mean;
- since  $d_q \geq r$  when  $q \leq \nu$ , the inequality (2) follows by

$$r^r \binom{d_q}{r} = \frac{r^r d_q^r}{r!} \left(1 - \frac{1}{d_q}\right) \left(1 - \frac{2}{d_q}\right) \dots \left(1 - \frac{r-1}{d_q}\right) \geq \frac{r^r d_q^r}{r!} \frac{r-1}{r} \frac{r-2}{r} \dots \frac{1}{r} = d_q^r;$$

- the (in)equalities (3) and (4) are obtained by double counting the number of pairs  $(\{j_1, \dots, j_r\}, q)$  of an  $r$ -element subset of  $[m]$  and  $q \in S_{j_1} \cap \dots \cap S_{j_r}$ .  $\square$

*Proof of Theorem 6.15.2.* Induction on  $d$ . The base  $d = 1$  follows because if a graph on  $n$  vertices does not contain a subgraph homeomorphic to  $K_{r,r}$ , then the graph does not contain a subgraph homeomorphic to  $K_{2r}$  and hence has  $O(n)$  vertices [BT98] (this was apparently proved in the paper [Ma68] which is not easily available to me).

Let us prove the inductive step. If a  $d$ -complex  $K$  having  $n$  vertices does not contain a subcomplex homeomorphic to  $[r]^{*(d+1)}$ , then any  $r$ -tuple intersection of the links of vertices from  $K$  does not contain a subcomplex homeomorphic to  $[r]^{*d}$ . Apply Lemma 6.15.3 to the set of  $a \leq \binom{n}{d} < n^d$  simplices of  $K$  having dimension  $d-1$ , and to  $m = n$  subsets defined by links of the vertices. By the inductive hypothesis  $s \leq Cn^{d-r2^{-d}}$ . Hence the number of  $d$ -simplices of  $K$  does not exceed  $rnn^{(r-1)d/r} \left(Cn^{d-r2^{-d}}\right)^{1/r} = C^r n^{d+1-r1^{-d}}$ .  $\square$

The following version of Lemma 6.15.3 is also possibly known. It was (re)invented by I. Mitrofanov and the author in discussions of the  $r$ -fold Khintchine recurrence theorem, see [OC, Problem 5].

**Лемма 6.15.4.** *For every integers  $r, m, a$  and subsets  $S_1, \dots, S_m \subset [a]$  we have*

$$a^{r-1} \sum_{j_1, \dots, j_r=1}^m |S_{j_1} \cap \dots \cap S_{j_r}| \geq \left( \sum_{j=1}^m |S_j| \right)^r.$$

*Доказательство.* Consider the decomposition of  $[a]$  by the sets  $S_j$  and their complements. The sets of this decomposition correspond to subsets of  $[m]$ . Denote by  $\mu_A$  the number of elements in the set of this decomposition corresponding to a subset  $A \subset [m]$ .

To every pair  $(A, j)$  of a subset  $A \subset [m]$  and a number  $j \in [m]$  assign 0 if  $j \notin A$  and assign  $\mu_A$  if  $j \in A$ . Let us double count the sum  $\Sigma$  of the obtained  $2^m \cdot m$  numbers. We obtain

$$\sum_{j=1}^m |S_j| = \Sigma = \sum_{A \subset [m]} |A| \mu_A.$$

To every pair  $(A, (j_1, \dots, j_r))$  of a subset  $A \subset [m]$  and a vector  $(j_1, \dots, j_r) \in [m]^r$  assign 0 if  $\{j_1, \dots, j_r\} \not\subset A$  and assign  $\mu_A$  if  $\{j_1, \dots, j_r\} \subset A$ . Let us double count the sum  $\Sigma_r$  of the obtained  $2^m \cdot m^r$  numbers. We obtain

$$\sum_{j_1, \dots, j_r=1}^m |S_{j_1} \cap \dots \cap S_{j_r}| = \Sigma_r = \sum_{A \subset [m]} |A|^r \mu_A.$$

Hence by the inequality between the weighted arithmetic mean and the weighted degree  $r$  mean, and using  $\sum_{A \subset [m]} \mu_A = a$ , we obtain

$$a^{r-1} \Sigma_r \geq \left( \sum_{A \subset [m]} |A| \mu_A \right)^r = \left( \sum_{j=1}^n |S_j| \right)^r.$$

□

## 6.16 Джойн

The following constructions generalize the definition of cone (§6.3).

Assume that subsets  $U, V \subset \mathbb{R}^d$  lie in skew affine subspaces. For  $U, V \neq \emptyset$  define the (geometric) **join**

$$U * V := \{tx + (1-t)y \in \mathbb{R}^d : x \in U, y \in V, t \in [0, 1]\}.$$

Define  $U * \emptyset := U$  and  $\emptyset * V := V$ .

The *topological join*  $U * V$  is the topological space obtained from  $U \times V \times [0, 1]$  by identifications  $(x, y, 0) \sim (x', y, 0)$  and  $(x, y, 1) \sim (x, y', 1)$  for each  $x, x' \in U, y, y' \in V$ . (If you do not know the quotient construction for topological spaces, then regard this as an informal interpretation.)

**Задача 6.16.1.** If  $U$  and  $V$  are unions of faces of some simplex  $\Delta_n$  and are disjoint, then  $U * V$  is the union of all faces of  $\Delta_n$  that correspond to subsets  $\sigma \sqcup \tau$ , where  $\sigma, \tau \subset [n+1]$  correspond to faces of  $U, V$ , respectively.

Complexes  $K$  and  $L$  are called *isomorphic* if there is a bijection  $f: V(K) \rightarrow V(L)$  such that a subset  $A \subset V(K)$  is a face if and only if the subset  $f(A) \subset V(L)$  is a face. For simplicity, we use the equality sign between isomorphic complexes, although formally being isomorphic is not the same as being equal.

For complexes  $K$  and  $L$  take a complex  $L'$  isomorphic to  $L$  such that  $V(K) \cap V(L') = \emptyset$ . Then the (simplicial) **join**  $K * L$  is the complex with the set  $V(K) \sqcup V(L')$  of vertices and the set  $\{\sigma \sqcup \tau : \sigma \in F(K), \tau \in F(L')\}$  of faces. Clearly,

$$\text{Con } K = K * [1], \quad K = K * \emptyset \subset K * L, \quad K * L = L * K, \quad \text{and} \quad (K_1 * K_2) * K_3 = K_1 * (K_2 * K_3).$$

For subsets  $U_1, \dots, U_r \subset \mathbb{R}^d$  lying in skew affine subspaces the (geometric)  $r$ -tuple join is

$$U_1 * \dots * U_r := \{t_1 x_1 + \dots + t_r x_r \in \mathbb{R}^d : x_j \in U_j, t_j \in [0, 1], t_1 + \dots + t_r = 1\}.$$

Analogously one interprets the (simplicial)  $r$ -tuple join of  $r$  complexes. The  $k$ -tuple join of  $k$  copies of a complex  $K$  is denoted by  $K^{*k}$ .

**Задача 6.16.2.** (a)  $[1]^{*k} = D^{k-1}$ ; (b)  $D^k * D^l = D^{k+l+1}$ .

For more discussions of the geometric, topological, and combinatorial join see [Ma03, §4.2].

Два комплекса называются (PL) **гомеоморфными**, если один можно получить из другого (точнее, из комплекса, изоморфного другому) операциями подразделения ребра и обратными к ним. Обозначение:  $K \cong L$ . Хотя задачи этого пункта сформулированы для PL гомеоморфности комплексов, вы можете вместо этого привести доказательство топологической гомеоморфности их тел (см. определение в п. 6.7 и подробности в [Sk20, §5]).

**Задача 6.16.3.** (a)  $[2]^{*k} \cong S^{k-1}$ ; (b)  $(S^1)^{*k} \cong S^{2k-1}$ ;  
(c)  $S^k * D^l \cong D^{k+l+1}$ ; (d)  $S^k * S^l \cong S^{k+l+1}$ .

Part (c) follows by part (a) and assertion 6.16.2.a. Parts (b,d) follow by part (a).

*Hint to (a).* Индукция по  $k$ . База  $k = 1$  очевидна. Для доказательства шага индукции достаточно показать, что  $S^k \cong S^{k-1} * [2]$ . Обозначим через  $F_k := \binom{[k+2]}{\leq k+1}$  множество всех граней сферы  $S^k$ . Отождествим  $[2]$  с  $\{k+2, k+3\}$ . Равенство  $S^k \cong S^{k-1} * [2]$  следует из того, что  $F_k$  переводится подразбиением грани  $[k+1]$  вершиной  $k+3$  в множество

$$F_{k-1} \cup \{\sigma \cup \{k+2\} : \sigma \in F_{k-1}\} \cup \{\sigma \cup \{k+3\} : \sigma \in F_{k-1}\}$$

всех граней джойна  $S^{k-1} * [2]$ .

**Задача 6.16.4.** Any map (a)  $S^1 \rightarrow [3]^{*3}$ ; (b)  $S^k \rightarrow [r]^{*k+2}$  is null-homotopic.

Part (a) and the case  $k = 1$  of part (b) are proved using Seifert-van Kampen Theorem [Sk20, §14]. Then part (b) is proved using Hurewicz Theorem and Mayer-Vietoris sequence [Sk20, §§11, 14].

If  $K$  is a  $k$ -complex,  $2m \geq 3k+3$  and the join  $K * [3]$  PL embeds into  $\mathbb{R}^{m+2}$ , then  $K$  PL embeds into  $\mathbb{R}^m$ . [PS20]

## 6.17 Декартово произведение

В этом пункте  $K$  и  $L$  — графы с вершинами  $1, 2, \dots, v_K$  и  $1, 2, \dots, v_L$ , не имеющие изолированных вершин.

Для подмножества  $U \subset \mathbb{R}^d$  (геометрическим) **цилиндром** над  $U$  называется  $U \times D^1 := \{(x, t) \in \mathbb{R}^{d+1} : x \in U, t \in [-1, 1]\}$ . Название «цилиндр» принято потому, что цилиндр над окружностью является боковой поверхностью «обычного» цилиндра.

**Цилиндром** (комбинаторным) над графом  $K$  называется любой 2-комплекс  $K \times D^1$ , PL гомеоморфный любому из двух следующих (PL гомеоморфных друг другу).

*Первый комплекс* строится по набору ориентаций на ребрах графа  $K$ , имеет вершины  $1, 2, \dots, v_K, 1', 2', \dots, v'_K$ , и все грани  $\{i, j, i'\}, \{i', j', j\}$ , где  $(i, j)$  — ориентированное ребро графа  $K$  (рис. 6.17.1 слева).

*Второй комплекс* имеет вершины  $1, 2, \dots, v_K, 1', 2', \dots, v'_K, u_1, \dots, u_e$ , где  $e$  — количество ребер графа, и все грани  $\{i, j, u_e\}, \{i', j', u_e\}, \{i', j, u_e\}, \{i, j', u_e\}$ , где  $e = (i, j)$  — ребро графа.

For instance, the cylinders over  $K_2 = D^1$ ,  $K_3 = S^1$  and  $K_5$  (or rather their PL ‘realizations’ in  $\mathbb{R}^3$ , see §6.5) are shown in Figures 6.17.1, left, 6.17.1, middle, and 6.17.2, respectively.

**Задача 6.17.1.** (a) Цилиндр над путем, конус над путем, конус над циклом и 2-диск  $D^2$  попарно PL гомеоморфны.

(b) Цилиндры над гомеоморфными графами гомеоморфны.

(c) Цилиндр над  $n$ -одом  $K_{1,n} = [1] * [n]$  PL гомеоморфен конусу над  $n$ -одом. (Эти комплексы изображаются как книжка с  $n$  листами, см. рис. 6.3.1 и [Sk20, п. 2.2].)

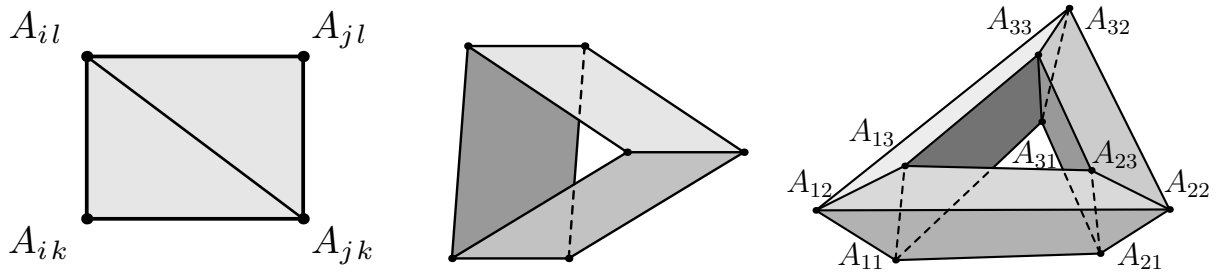


Рис. 6.17.1: Left: Realization in  $\mathbb{R}^2$  of the *square* of the complete graph on 2 vertices. Middle: Realization in  $\mathbb{R}^3$  of the *product* of the complete graphs on 2 and on 3 vertices. Right: Realization in  $\mathbb{R}^3$  of the *square* of the complete graph on 3 vertices.

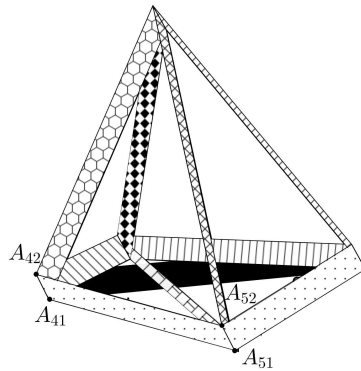


Рис. 6.17.2: Realization in  $\mathbb{R}^3$  of the *product* of the complete graphs on 5 and on 2 vertices.

**Задача 6.17.2.** (а) Постройте «разбиение» призмы (геометрического цилиндра)  $D^k \times D^1 \subset \mathbb{R}^{k+1}$  на  $(k+1)$ -симплексы.

(а') То же, но вершины каждого из  $(k+1)$ -симплексов являются некоторыми вершинами призмы. (Не забудьте доказать, что это «разбиение».)

(б) Определите комбинаторный *цилиндр* над произвольным комплексом.

(с) Цилиндры над гомеоморфными комплексами гомеоморфны.

Для подмножеств  $U, V \subset \mathbb{R}^d$  их (геометрическим) **произведением** называется  $U \times V := \{(x, y) \in \mathbb{R}^{2d} : x \in U, y \in V\}$ .

The *product*  $K_m \times K_n$  is any 2-complex PL homeomorphic to any of the following two 2-complexes (PL homeomorphic to each other):

- 2-complex on  $mn$  vertices  $(j, p)$ , where  $j \in [m]$ ,  $p \in [n]$ , and whose faces are all 3-element sets

$$(*) \quad \{(j, p), (k, q), (j, q)\} \quad \text{and} \quad \{(j, p), (k, q), (k, p)\},$$

where  $1 \leq j < k \leq m$ ,  $1 \leq p < q \leq n$ .

- 2-complex on  $mn + \binom{m}{2}\binom{n}{2}$  vertices  $(j, p)$ , where  $j \in [m]$ ,  $p \in [n]$ , and  $(a, b)$ , where  $a \in \binom{m}{2}$ ,  $b \in \binom{n}{2}$ , and whose faces are all 3-element sets

$$(**) \quad \{(j, p), (j, q), (\{j, k\}, \{p, q\})\} \quad \text{and} \quad \{(j, p), (k, p), (\{j, k\}, \{p, q\})\},$$

where  $1 \leq j < k \leq m$ ,  $1 \leq p < q \leq n$ .

For instance, the product  $K_3 \times K_3 = S^1 \times S^1$  (the *torus*) is shown in Figure 6.17.1, right.

**Произведением** (комбинаторным)  $K \times L$  графов  $K$  и  $L$  называется любой 2-комплекс, PL гомеоморфный любому из двух следующих (PL гомеоморфных друг другу).

*Первый комплекс* строится по наборам ориентаций на ребрах графов  $K$  и  $L$ , имеет вершины  $(j, p)$ ,  $j \in [v_K]$ ,  $p \in [v_L]$ , и все грани  $(*)$ , где  $(j, k)$  и  $(p, q)$  — ориентированные ребра графов  $K$  и  $L$ .

Второй комплекс имеет вершины  $(j, p)$ ,  $j \in [v_K]$ ,  $p \in [v_L]$ , и  $(e, f)$ , где  $e$  и  $f$  — ребра графов  $K$  и  $L$ , а также все грани (\*\*), где  $\{j, k\}$  и  $\{p, q\}$  — ребра графов  $K$  и  $L$ .

**Задача 6.17.3.** (а) Квадрат  $T \times T$  триода  $T := K_{3,1} = [1] * [3]$  PL гомеоморфен конусу над некоторым графом (над каким?).

(б) Если  $K \cong K'$  и  $L \cong L'$  для графов  $K, L, K', L'$ , то  $K \times L \cong K' \times L'$ .

**Задача 6.17.4.** (а) Постройте «разбиение» призмы (геометрического произведения)  $D^k \times D^l \subset \mathbb{R}^{k+l}$  на  $(k+l)$ -симплексы.

(а') То же, но вершины каждого из  $(k+l)$ -симплексов являются некоторыми вершинами призмы. (Докажите сначала для  $k = l = 2$ ; «сожмите грани» в построенной Вами триангуляции произведения  $D^2 \times D^1 \times D^1$ ; не забудьте доказать, что это «разбиение».)

(б) Определите комбинаторное произведение произвольных комплексов.

(с) The join  $P * Q$  contains the product  $P \times Q$ .

(d)  $\text{Con}(P * Q) \cong \text{Con } P \times \text{Con } Q$  для любых комплексов  $P$  и  $Q$ .

(е)  $T^k \cong \text{Con}([3]^{*k})$ .

В п. (с,d,e) докажите, на Ваш выбор, топологическую содержимость / гомеоморфность геометрических конусов / джойнов / произведений, или PL содержимость / гомеоморфность комбинаторных конусов / джойнов / произведений.

**Задача 6.17.5.** Вложимо ли кусочно-линейно в плоскость произведение

(а)  $K_2 \times K_3$ ; (б)  $K_2 \times T$ ; (с)  $K_3 \times K_3$ ?

**Задача 6.17.6.** Вложимо ли кусочно-линейно в  $\mathbb{R}^3$  произведение

(а)  $K_2 \times K_n$ ; (б) произвольного планарного графа на  $K_3$ ; (с)  $T \times T$ ?

**Замечание 6.17.7.** (а) Analogously to [Sk14, §4] the products  $K_5 \times K_3$ ,  $K_4 \times K_4$  and  $K_{3,3} \times K_3$  are not PL embeddable into  $\mathbb{R}^3$ . This and the answers to Problems 6.17.6.abc imply that

- the product  $K_m \times K_n$  is PL embeddable into  $\mathbb{R}^3$  if and only if either  $\min\{m, n\} = 2$  or  $m = n = 3$  or  $\{m, n\} = \{3, 4\}$ .

- the product  $G \times H$  of graphs is PL embeddable into  $\mathbb{R}^3$  if and only if either one of the graphs is a point, or one of the graphs is homeomorphic to  $D^1$ , or one of the graphs is homeomorphic to  $S^1$  and the other is planar.

(б) Analogously to [Sk14, §4] the product  $K_5 \times K_5$  is not PL embeddable into  $\mathbb{R}^4$ . On the other hand, [Sk14, Example 4.4] generalizes to show that the product  $K_4 \times K_n$  is PL embeddable  $\mathbb{R}^4$  for every  $n$ . (Более того, декартово произведения любых двух графов, один из которых планарен, PL вложимо в  $\mathbb{R}^4$ .) Hence the product  $K_m \times K_n$  is PL embeddable into  $\mathbb{R}^4$  if and only if  $\min\{m, n\} \leq 4$ .

(с) The following is proved in [Sk03] (cf. [ARS01]): Let  $G_1, \dots, G_n$  be connected graphs, not homeomorphic to the point, to  $D^1$  and to  $S^1$ . The minimal dimension  $d$  such that  $G_1 \times \dots \times G_n \times (S^1)^s \times (D^1)^i$  is PL embeddable into  $\mathbb{R}^d$  is

$$\begin{cases} 2n + s + i & \text{either } i \neq 0 \text{ or some } G_k \text{ is planar} \\ 2n + s + 1 & \text{otherwise} \end{cases}.$$

**Answers to 6.17.5.** (а) — да, (б,c) — нет.

**Hints to 6.17.6.** Ответы: (а,b) — да, (с) — нет.

For (а) the PL embeddability follows because in the construction in [Sk14, §4.3]

- for any  $1 \leq p < q \leq n$  the triangles  $A_{1p}A_{2q}A_{2p}$  and  $A_{1p}A_{2q}A_{1q}$  intersect exactly by the common side and lie in the parallelogram  $12 \times pq$ .

- since points  $(0, 0, 0), V, A_{11}, \dots, A_{1n}$  are in general position, if parallelograms  $12 \times pq$  and  $12 \times rs$  have a common point, then they intersect by a common side.

For (b) the realizability improvement is checked analogously.

(c)  $T \times T \cong \text{Con } K_{3,3}$ .

## 6.18 Embeddability of products and twisted products \*

Приведем задачи для исследования о вложимости косых произведений

*Косым произведением  $G_\varphi$  графа  $G$  на окружность, отвечающим автоморфизму  $\varphi$*  называется фигура, полученная из цилиндра над графом  $G$  склейкой ребер  $A'B'$  и  $\varphi(AB)$  для каждого ребра  $AB$  графа  $G$ . Ясно, что косое произведением графа  $G$  на окружность «выглядит» как

- боковая поверхность (обычного) цилиндра или как лента Мебиуса для пути  $G$ ,
- тор или бутылка Клейна (задача 6.1.1.b и пример после нее) для цикла  $G$ ,
- результат некоторой  $\sigma$ -склейки для  $n$ -ода  $G$ .

**Задача 6.18.1.** (a)  $(K_4)_{\text{id}}$  PL вложим в  $\mathbb{R}^3$ .

(b)\* Для каких автоморфизмов  $\varphi : K_4 \rightarrow K_4$  в  $\mathbb{R}^3$  PL вложим  $(K_4)_\varphi$ ?

(c)  $(K_5)_{\text{id}}$  PL невложим в  $\mathbb{R}^3$ .

(d)\* Для каких автоморфизмов  $\varphi : K_5 \rightarrow K_5$  в  $\mathbb{R}^3$  PL вложим  $(K_5)_\varphi$ ?

**Задача 6.18.2.** \* Для каких графов  $G$  и автоморфизмов  $\varphi : G \rightarrow G$  косое произведение  $G_\varphi$  PL вложимо в  $\mathbb{R}^3$ ?

Определение  $I$ - и  $S^1$ -расслоений над графами см. в [Sk20, п. 13.1].

**Задача 6.18.3.** (a) Любое  $I$ -расслоение над графом PL вложимо в  $\mathbb{R}^3$ .

(b)  $S^1$ -расслоение над графом PL вложимо в  $\mathbb{R}^3$  тогда и только тогда, когда граф планарен, а расслоение является прямым произведением.

(c)\* Какие расслоения над окружностью  $S^1$  со слоем граф PL вложимы в  $\mathbb{R}^3$ ?

(d)  $T$ -расслоение над связным графом PL вложимо в  $\mathbb{R}^3$  тогда и только тогда, когда этот граф является циклом и перестановка ребер триода, определяющая  $T$ -расслоение, четная. (Определение  $T$ -расслоения для триода  $T$  аналогично определению  $I$ - и  $S^1$ -расслоений.)

Решения задач 6.18.3 позволят описать все косые произведения графов, PL вложимые в  $\mathbb{R}^3$ .

**Задача 6.18.4.** (a) Произведение  $P \times S^1$  2-комплекса  $P$  и окружности (это трехмерный комплекс) PL вложимо в  $\mathbb{R}^3$  тогда и только тогда, когда  $P$  планарен.

(b) *Гипотеза.* Цилиндр  $P \times I$  над 2-комплексом  $P$  (это трехмерный комплекс) PL вложим в  $\mathbb{R}^3$  тогда и только тогда, когда никакой гомеоморфный  $P$  комплекс не содержит подкомплекса, гомеоморфного кнопке (рис. 6.3.1,  $K_{VI}$ ) или ленте Мебиуса. (Оба эти свойства равносильны PL вложимости  $P$  в сферу с некоторым количеством ручек. Используйте идею доказательства теоремы Халина-Юнга 6.13.1.a.)

(c) Какие прямые произведения 2-комплекса на граф PL вложимы в  $\mathbb{R}^3$ ?

(d)\* Какие  $I$ -расслоения над 2-комплексами PL вложимы в  $\mathbb{R}^3$ ?

(e)\* А  $S^1$ -расслоения?

## 7 Теоремы о неотъемлемых пересечениях

### 7.1 Линейные теоремы о неотъемлемых пересечениях

В этом параграфе слова «для любых целых  $d, r, N, k > 0$ » в начале формулировок пропускаются.

Подмножество в  $\mathbb{R}^d$  называется *выпуклым*, если для любых двух его точек соединяющий их отрезок содержится в этом подмножестве. **Выпуклой оболочкой**  $\langle X \rangle$  подмножества  $X \subset \mathbb{R}^d$  называется наименьшее по включению выпуклое множество, содержащее  $X$ . **Выпуклой оболочкой** конечного набора точек  $p_1, \dots, p_n \in \mathbb{R}^d$  является множество

$$\{\alpha_1 p_1 + \dots + \alpha_n p_n : \alpha_1, \dots, \alpha_n \geq 0, \alpha_1 + \dots + \alpha_n = 1\}.$$

Выпуклая оболочка конечного набора точек на плоскости — наименьший по включению выпуклый многоугольник, их содержащий.

Вершины  $d$ -мерного симплекса образуют множество из  $d + 1$  точки в  $\mathbb{R}^d$ , при любом разбиении которого на два множества выпуклые оболочки множеств не пересекаются.

**Теорема 7.1.1** (Радон, ср. теорему 2.1.1). *Любые  $d + 2$  точки в  $\mathbb{R}^d$  можно разбить на два множества, выпуклые оболочки которых пересекаются.*

Геометрическое индуктивное доказательство приведено ниже, ср. [Pe72, Ko18, Sk14, RRS]. Стандартное алгебраическое доказательство см., например, в [BZ16, RRS].

Разбиение из теоремы Радона единственно, ср. с утверждением 2.1.2.

Вершины  $2k$ -мерного симплекса и его центр образуют  $2k + 2$  точки в  $\mathbb{R}^{2k}$ , при любом разбиении которых на два  $(k + 1)$ -элементных множества выпуклые оболочки множеств не пересекаются.

**Теорема 7.1.2** (Линейная теорема ван Кампена–Флореса, ср. утверждение 1.1.1.a). *Из любых  $2k + 3$  точек в  $\mathbb{R}^{2k}$  можно выбрать два непересекающихся  $(k + 1)$ -элементных множества, выпуклые оболочки которых пересекаются.*

Алгебраическое доказательство см. в [BM15]. Теорема 7.1.2 имеет «количественную версию», аналогичную утверждению 1.1.1.b. Версия теоремы 7.1.2 в нечетных размерностях (теорема Конвея–Гордона–Закса–Спеша–Сегала–Ловаса–Шрийвера–Таниямы) приведена, например, в [Sk14, Теорема 1.6] или в [Sk16, §4], см.  $(VKF_d)$  для  $d$  нечетного. Геометрическое индуктивное доказательство теоремы 7.1.2 (включая количественную версию и количественную версию в нечетных размерностях) аналогично доказательству для маломерных случаев, изложенному в обзоре [Sk14]. Theorem 7.1.2 also follows from its topological version 7.2.2 (surprisingly, such a deduction from a stronger result is not much harder than a direct proof).

Либо возьмем вершины  $d$ -мерного симплекса, каждую с кратностью  $r - 1$ , либо для каждой из вершин возьмем  $r - 1$  близких точек, лежащих в общем положении, либо возьмем любые  $(d + 1)(r - 1)$  точек общего положения в  $\mathbb{R}^d$ . Получим  $(d + 1)(r - 1)$  точек в  $\mathbb{R}^d$ , при любом разбиении которых на  $r$  множеств выпуклые оболочки этих множеств не имеют общей точки.

**Теорема 7.1.3** (Тверберг, ср. теорему 2.1.4). *Любые  $(d + 1)(r - 1) + 1$  точек в  $\mathbb{R}^d$  можно разбить на  $r$  множеств, все  $r$  выпуклых оболочек которых имеют общую точку.*

Quantitative analogues of Theorem 7.1.3 and Conjecture 7.1.4 are unknown, even for  $r > 2$  a prime.

Мотивированное изложение известного доказательства см. в [RRS]. Оно основано на следующей «цветной теореме Каратеодори» (доказанной Баранем): Пусть точка  $0 \in \mathbb{R}^n$  лежит в выпуклой оболочке каждого из  $n+1$  конечных множеств  $M_0, M_1, \dots, M_n \subset \mathbb{R}^n$ . Тогда существуют точки  $m_i \in M_i$ , для которых  $0 \in \langle m_0, m_1, \dots, m_n \rangle$ .

Рассмотрим в  $\mathbb{R}^{kr}$  вершины  $kr$ -мерного симплекса и его центр. Либо возьмем эти  $kr + 2$  точки, каждую с кратностью  $r - 1$ , либо для каждой из этих точек возьмем  $r - 1$  близких точек, лежащих в общем положении. Получим  $(r - 1)(kr + 2)$  точек в  $\mathbb{R}^{kr}$  такие, что для любых  $r$  попарно непересекающихся наборов из  $k(r - 1) + 1$  точек все  $r$  выпуклых оболочек этих наборов не имеют общей точки.<sup>28</sup>

**Гипотеза 7.1.4** (Линейная  $r$ -кратная гипотеза ван Кампена–Флореса). Из любых  $(r - 1)(kr + 2) + 1$  точек в  $\mathbb{R}^{kr}$  можно выбрать  $r$  попарно непересекающихся подмножеств по  $(k(r - 1) + 1)$  точек в каждом, все  $r$  выпуклых оболочек которых имеют общую точку.

Это верно для  $r$  простого [Sa91g] и даже для  $r$  степени простого [Vo96v], но является открытой проблемой для других  $r$  [Fr17, начало §2].

**Замечание 7.1.5.** Существуют ли 6 точек на плоскости, при любом разбиении которых на 3 множества выпуклые оболочки некоторых двух из этих множеств не пересекаются? Это частный случай гипотезы Reay, <https://arxiv.org/abs/0710.4668>

*Геометрическое индуктивное доказательство теоремы Радона 7.1.1.* Индукция по  $d$ . База для  $d = 1$  очевидна.

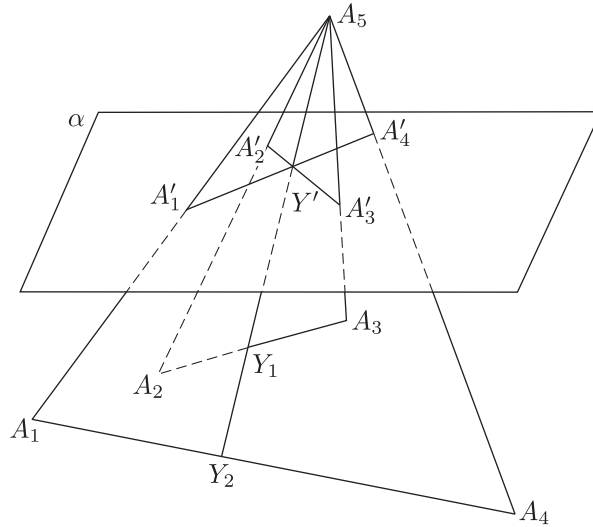


Рис. 7.1.1: К доказательству теоремы Радона

*Переход от  $d$  к  $d + 1$ .* Существует  $d$ -мерная гиперплоскость  $\alpha$ , для которой ровно одна точка из данного набора лежит по одну сторону от  $\alpha$ , а остальные — по другую. Обозначим через  $O$  одну точку набора, а через  $M$  множество оставшихся точек набора так, чтобы  $\alpha$  отделяла  $O$  от  $M$ . Для любой точки  $A \in M$  обозначим  $A' := \alpha \cap OA$ .

Воспользуемся теоремой Радона для множества  $M' := \{A' \mid A \in M\}$  из  $d + 2$  точек в  $d$ -мерном пространстве  $\alpha$ . Получим разбиение на два множества  $U'_1$  и  $U'_2$ , выпуклые оболочки которых пересекаются в точке  $X'$ . Обозначим  $U_1 := \{A \mid A' \in U'_1\}$  и  $U_2 := \{A \mid A' \in U'_2\}$ .

<sup>28</sup>For  $r = 3k = 3$  cf. [Ma03, Example 6.7.4]: ‘It is not known whether such triangles can always be found for 9 points in  $\mathbb{R}^3$ ’.



Ясно, что  $U_1' \subset \langle O, U_1 \rangle$ . Следовательно,  $X' \in \langle O, U_1 \rangle$ , и, более того, весь отрезок  $OX'$  содержится в  $\langle O, U_1 \rangle$ . Обозначим через  $X_1$  точку, для которой прямая  $OX'$  пересекает  $\langle O, U_2 \rangle$  по отрезку  $OX_1$ . Тогда  $X_1 \in \langle U_1 \rangle$  и  $X' \in OX_1$ .

Аналогично, через  $X_2$  обозначим точку, для которой прямая  $OX'$  пересекает  $\langle O, U_2 \rangle$  по отрезку  $OX_2$ . Тогда  $X_2 \in \langle U_2 \rangle$  и  $X' \in OX_2$ .

Точки  $X_1$  и  $X_2$  лежат на луче  $OX'$ . Не умаляя общности,  $X_2$  лежит между  $O$  и  $X_1$ . Тогда  $X_2 \in \langle O, U_1 \rangle \cap \langle U_2 \rangle$ , что и требовалось.  $\square$

## 7.2 Топологические теоремы о двукратных пересечениях

Обозначим через  $\Delta_N$  симплекс размерности  $N$ .

**Теорема 7.2.1** (Топологическая теорема Радона, [ВВ79], ср. с теоремой 2.2.2). *Для любого отображения  $\Delta_{d+1} \rightarrow \mathbb{R}^d$  образы некоторых несмежных граней пересекаются.*

Это доказывается с использованием числа Радона или знаменитой теоремы Борсука-Улама 6.5.4 (аналогично случаю  $d = 2$  в п. 2.2 и п. 8.1). Теорема 7.2.1 интересна как «симплициальный» аналог теоремы Борсука-Улама 6.5.4.

**Теорема 7.2.2** (ван Кампен–Флорес, ср. с теоремой 1.4.1 и утверждением 6.5.3.a). *Для любого отображения  $\Delta_{2k+2} \rightarrow \mathbb{R}^{2k}$  образы некоторых несмежных  $k$ -мерных граней пересекаются.*

Это следует из теоремы 7.2.1 для  $d = 2k+1$  аналогично замечанию 7.2.3.e, из теоремы Борсука-Улама 6.5.4 (см. вывод в [Ма03, §5]), из леммы 6.7.3. Это также доказывается с использованием индукции по размерности (аналогично маломерным случаям [Sk14, Zi13]).

**Замечание 7.2.3.** (a) Теоремы 7.2.1 и 7.2.2 обобщают теоремы 7.1.1 и 7.1.2, соответственно. Аналогичные замечания для нижеследующих теорем и гипотез справедливы и пропускаются.

(b) Отображение  $f : \Delta_N \rightarrow \mathbb{R}^d$  называется **линейным**, если

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) = \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$$

для любых  $\lambda \in [0, 1]$ ,  $x, y \in \Delta$ . Отображение  $\Delta_N \rightarrow \mathbb{R}^d$  называется **кусочно-линейным (PL)**, если оно линейно на каждой грани некоторой триангуляции симплекса  $\Delta_N$ .

Свойство «образы непересекающихся граней не пересекаются» устойчиво, т.е. сохраняется при достаточно малом шевелении отображения (см. замечание 6.10.3.b). Поэтому если в теореме 7.2.1 заменить (пропущенное) «непрерывное» на «PL» или на «PL общего положения», то получатся равносильные утверждения. Аналогичные замечания для нижеследующих теорем и гипотез этого пункта справедливы и пропускаются.

(c) Теоремы 7.2.1 и 7.2.2 имеют «количественные версии»: (d) и Lemma 6.7.3, аналогичные леммам 1.4.3 и 2.2.3. Прямые доказательства некоторых связей между этими результатами см. в п. (e) и [Sk16, §4].

(d) For any general position PL map  $f : \Delta_{d+1} \rightarrow \mathbb{R}^d$  the number of non-ordered pairs  $\{x, y\}$  of points in disjoint  $k$  and  $(d - k)$ -faces (for all  $k = 0, 1, \dots, d$ ) such that  $f(x) = f(y)$ , is odd. (For  $k = 0, d$  this number can be different from the number of intersection points in  $\mathbb{R}^d$  of images of disjoint  $k$  and  $(d - k)$ -faces.)

The proof is analogous to Lemma 2.2.3.

(e) Приведем вывод теоремы 1.4.1 (т.е. теоремы 7.2.2 для  $k = 1$ ) из топологической теоремы Радона 7.2.1 для  $d = 3$ .

Пусть, напротив,  $f : K_5 \rightarrow \mathbb{R}^2$  — отображение, для которого образы несмежных ребер не имеют общей точки. Продолжим  $f$  произвольно на  $\Delta_4$  (см. [Sk20, §3.4]; объединение ребер симплекса  $\Delta_4$  есть граф  $K_5$ ). Обозначим через  $\rho(x)$  расстояние от точки  $x \in \Delta_4$  до объединения ребер симплекса. Докажем, что  $f \times \rho : \Delta_4 \rightarrow \mathbb{R}^3$  является контр-примером к теореме 7.2.1 для  $d = 3$ .

Пусть, напротив, некоторые две точки  $x_1, x_2 \in \Delta_4$  лежат в непересекающихся гранях и отобразились при  $f \times \rho$  в одну точку в  $\mathbb{R}^3$ . Размерность одной из этих граней (н.у.о., первой) не больше  $\frac{5}{2} - 1$ , поэтому она не превосходит 1. Значит,  $\rho(x_1) = 0$ . Тогда  $\rho(x_2) = \rho(x_1) = 0$ . Поэтому условие  $f(x_1) = f(x_2)$  противоречит тому, что  $f$ -образы несмежных ребер не имеют общей точки.

### 7.3 Топологические гипотезы о многократных пересечениях

Напомним, что **комплексом** называется набор некоторых граней симплекса. Объединение этих граней будем также называть комплексом (точнее, оно называется *телом* комплекса). См. подробнее §6.4.

Отображение  $f : K \rightarrow \mathbb{R}^d$  комплекса  $K$  называется **почти  $r$ -вложением**, если образы любых  $r$  попарно несмежных граней  $\sigma_1, \dots, \sigma_r$  не имеют общей точки:

$$f(\sigma_1) \cap \dots \cap f(\sigma_r) = \emptyset.$$

Теоремы 7.2.1 и 7.2.2 утверждают, что не существует почти 2-вложений  $\Delta_{d+1} \rightarrow \mathbb{R}^d$  и объединения  $k$ -мерных граней симплекса  $\Delta_{2k+2}$  в  $\mathbb{R}^{2k}$ . См. замечания 6.10.3.b и 7.3.7.e.

**Гипотеза 7.3.1** (Топологическая гипотеза Тверберга). *Не существует почти  $r$ -вложения  $\Delta_{(d+1)(r-1)} \rightarrow \mathbb{R}^d$ .*

*Иными словами, для любого отображения  $\Delta_{(d+1)(r-1)} \rightarrow \mathbb{R}^d$  образы некоторых  $r$  попарно несмежных граней имеют общую точку.*

Эта гипотеза обобщает теорему Тверберга 7.1.3 и топологическую теорему Радона 7.2.1. Гипотеза выдвинута Э. Баймочем, И. Баранем [BB79] и Х. Твербергом [GS79, задача 84]. Она считалась центральной нерешенной проблемой топологической комбинаторики. По моему мнению, одна из причин для этого следующая. Ее исследование — один из первых примеров в топологической комбинаторике, для которого действия группы  $\mathbb{Z}_2$  недостаточны и нужно рассматривать более сложные группы.

Эта гипотеза верна, если  $r$  — степень простого, и неверна иначе.

**Теорема 7.3.2.** (a) [BSS, Oz, Vo96] *Если  $r$  — степень простого, то не существует почти  $r$ -вложения  $\Delta_{(d+1)(r-1)} \rightarrow \mathbb{R}^d$ .*

(b) (см. [Oz, Gr10, BFZ14, Fr15, MW15] и сноску 29) *Если  $r$  — не степень простого и  $d \geq 2r + 1$ , то существует почти  $r$ -вложение  $\Delta_{(d+1)(r-1)} \rightarrow \mathbb{R}^d$ .*

Часть (a) для простого  $r$  доказана в [BSS], см. [Ma03, §6.2] и обзор [Sk16, §2.2]. A simplified exposition of более простого доказательства from [VZ93], [Ma03, §6.5, p. 166-167] приведено в §8.4. Часть (a) для  $r$  степени простого доказана в [Oz, Vo96], см. обзор [Sk16, §2.3].

Для первых контрпримеров к топологической гипотезе Тверберга 7.3.1 (теорема 7.3.2.b для  $d = 3r + 1$ ) важны работы [Oz, Gr10, Fr15, BFZ14, MW15] М. Езайдына, М. Громова, Ф. Фрика, П. Благоевича, Г. Циглера, И. Мабийяра и У. Вагнера.<sup>29</sup> Контр-пример с наименьшей (из известных) размерностью  $d$  — почти 6-вложение  $\Delta_{70} \rightarrow \mathbb{R}^{13}$ .

<sup>29</sup> Здесь не обсуждается соотношение вкладов разных авторов, см. замечание 7.4.3 и [Sk16, замечание 1.9 и §5]. Приведенное там обсуждение интересно неспециалисту, поскольку затрагивает важные общие

Для  $d \leq 2r$  и  $r$  не степени простого (например, для  $d = 2$  и  $r = 6$ ) топологическая гипотеза Тверберга 7.3.1 все еще открыта. Подход к случаю  $d = 2r$  предложен в [AMS+, замечание 3.1.a].

**Теорема 7.3.3.** (a) [FS20] Если  $r$  — степень простого, то не существует почти  $r$ -вложения  $\Delta_{(d+1)r-1} \rightarrow \mathbb{R}^d$ .

(b) [AKS] Если  $r$  — не степень простого и  $N := (d+1)r - r \left\lceil \frac{d+2}{r+1} \right\rceil - 2$ , то существует почти  $r$ -вложение  $\Delta_N \rightarrow \mathbb{R}^d$ .

Theorem 7.3.3.b is a partial result on [BFZ, Conjecture 5.5] stating that если  $r < d$  — не степень простого, то существует почти  $r$ -вложение  $\Delta_{(d+1)r-2} \rightarrow \mathbb{R}^d$ . The proof of Theorem 7.3.3.b uses Theorem 8.3.7. Более простой подход, приводящий к более слабым результатам, см. в замечании 7.4.1.c.

**Гипотеза 7.3.4** ( $r$ -кратная гипотеза ван Кампена–Флореса). Не существует почти  $r$ -вложения объединения  $k(r-1)$ -мерных граней симплекса  $\Delta_{(kr+2)(r-1)}$  в  $\mathbb{R}^{kr}$ .

Иными словами, для любого отображения  $f: \Delta_{(kr+2)(r-1)} \rightarrow \mathbb{R}^{kr}$  существуют  $r$  попарно непересекающихся  $k(r-1)$ -мерных граней, образы которых имеют общую точку.

Эта гипотеза верна, если  $r$  — степень простого, и неверна иначе.

**Теорема 7.3.5.** (a) Если  $r$  — степень простого, то не существует почти  $r$ -вложения объединения  $k(r-1)$ -мерных граней симплекса  $\Delta_{(kr+2)(r-1)}$  в  $\mathbb{R}^{kr}$ .

(b) Если  $r$  — не степень простого и  $k \geq 2$ , то существует почти  $r$ -вложение объединения  $k(r-1)$ -мерных граней симплекса  $\Delta_{(kr+2)(r-1)}$  в  $\mathbb{R}^{kr}$ .

Часть (a) доказана в [Sa91g, Vo96v] аналогично теореме 7.3.2.a. Этот результат также следует из теоремы 7.3.2.a и нижеприведенной леммы о принуждении 7.4.2. План доказательства части (b) приведен в §7.4 и §7.5 [Sk16, §3.1]. Для  $k = 1$  и  $r$  не степени простого  $r$ -кратная гипотеза ван Кампена–Флореса все еще открыта.

**Теорема 7.3.6** ([AKS]). Если  $r$  не степень простого, то объединение  $k$ -мерных граней любого симплекса допускает почти  $r$ -вложение в  $\mathbb{R}^{k + \left\lceil \frac{k+3}{r} \right\rceil}$ .

**Замечание 7.3.7.** (a) Доказательства результатов этого пункта основаны на красивом и плодотворном взаимодействии комбинаторики, алгебры и топологии. На это указывает, в частности, удивительное появление теоретико-числовых условий на размерность в топологических результатах. См., например, теоремы 7.3.2.ab и теоремы о реализуемости многообразий [Sk20, §12.1]. Такие условия показывают, что за красивой топологической формулировкой скрывается нетривиальная алгебра.

Более конкретно, доказательства положительных результатов используют эквивалентную алгебраическую топологию конфигурационных пространств, см. §8.4, [Sk16, §2]. Условие на  $r$  из теоремы 7.3.2.a необходимо для свойств (свободности или хотя бы эффективности) действия группы  $\mathbb{Z}_r$  на конфигурационных пространствах.

---

принципы научных обсуждений. При этом в §7.4 и §7.5 [Sk16, §1.2, §3.1] приводятся точные ссылки на каждый шаг доказательства, чтобы читатель мог составить собственное мнение. Другие изложения контрпримеров к топологической гипотезе Тверберга, а также описания вклада различных авторов, приводятся в [BBZ, первый абзац стр. 733 и ‘Контрпримеры’ на стр. 737], [BFZ, §1], [BZ16, §1 и начало §5], [JVZ, §1.1], [MW15, §1], [?, §1.1], [AMS+, абзац перед теоремой 1.1], [Fr17, стр. 1, внизу] [BS17], [Sh18]. Критика некоторых из них приведена в [Sk16, §5], вместе с наблюдениями о нарушении важных общих принципов научных обсуждений.

Доказательства контрпримеров используют, кроме этого, элементарную комбинаторику и геометрическую топологию (устранение многократных пересечений при помощи аналога трюка Уитни). Условие на  $r$  из теоремы 7.3.2.b появляется на более простом шаге доказательства — теореме Озайдына [Sk16, теорема 3.3]. Она утверждает, что алгебраическое препятствие  $v(\Sigma_r)$  к почти  $r$ -вложимости (являющееся аналогом чисел ван Кампена и Радона) является нулевым элементом некоторой абелевой группы (когомологий конфигурационного пространства). Обозначим через  $a_p$  частное от деления числа  $a \in \mathbb{Z}$  на степень числа  $p$ , входящую в каноническое разложение числа  $a$ . Тогда доказываются соотношения  $r!_p v(\Sigma_r) = 0$  для любых простого  $p$  и  $r \neq p^\alpha$ . Например, для  $r = 2$  имеем  $2v(\Sigma_2) = 0$  [Sk18, утверждение 1.5.13], а для  $r = 3$  имеем  $3v(\Sigma_3) = 0$ . Только если  $r$  не является степенью простого, из этих соотношений вытекает, что  $v(\Sigma_r) = 0$ .

(b) Если в топологической гипотезе Тверберга 7.3.1 заменить  $\Delta_{(d+1)(r-1)}$  на его  $d$ -мерный остов, то получится равносильное утверждение. Действительно, если в наборе  $r$  попарно непересекающихся граней симплекса  $\Delta_{(d+1)(r-1)}$  размерность хотя бы одной грани больше  $d$ , то малым шевелением можно сделать образы оставшихся  $r - 1$  граней не имеющими общей точки. (Начните со случаев  $r = 2, 3$ .)

(c) Гипотеза 7.3.1 означает, что существование *непрерывного или PL* почти  $r$ -вложения равносильно существованию *симплициального* почти  $r$ -вложения (поскольку эта гипотеза для *симплициальных* отображений верна ввиду теоремы Тверберга 7.1.3). Значит, эта гипотеза является многомерным  $r$ -кратным аналогом теоремы Фари 1.2.1, ср. с замечанием 6.5.1.

(d) Было бы интересно найти  $r$ -кратные аналоги теорем о неотъемлемой зацепленности см. [Sk18, проблему 4.4.d].

(e) Количественная версия теорем 7.3.2.a и 7.3.5.a неизвестна.

(f) Изучение почти  $r$ -вложений полезно сравнить с изучением *погружений без  $r$ -кратных точек*. Например,

- замкнутое 2-многообразие  $M$  допускает погружение в  $\mathbb{R}^3$  без тройных точек тогда и только тогда, когда  $\chi(M)$  четно (фольклор);

- любое 3-многообразие допускает погружение в  $\mathbb{R}^4$  с четырехкратной точкой [Fr78].

## 7.4 План доказательства теорем 7.3.2.b и 7.3.5.b

Вот план доказательства теорем 7.3.2.b и 7.3.5.b.

- теорема 7.3.2.b для  $d = 2r + 1$  (контрпример к топологической гипотезе Тверберга) следует из теоремы 7.3.5.b (контрпримера к  $r$ -кратной гипотезе ван Кампена–Флореса) и леммы о принуждении 7.4.2 (которая утверждает, что топологическая гипотеза Тверберга влечет  $r$ -кратную гипотезу ван Кампена–Флореса);

- лемма о принуждении 7.4.2 доказана Громовым и позже переоткрыта Благоевичем-Фриком-Циглером (см. замечание 7.4.3);

- теорема 7.3.5.b следует из теорем 7.5.1 и 7.5.2, принадлежащих Мабийяру-Вагнеру и Езайдыну;<sup>30</sup>

- теорема 7.3.2.b для  $d > 2r + 1$  вытекает из случая  $d = 2r + 1$  и замечания 7.4.1.b (этот шаг не нужен для первых контрпримеров).

**Замечание 7.4.1** (использование джойна). (a) Для двух отображений  $f : \Delta_a \rightarrow B^p$  и  $g : \Delta_b \rightarrow B^q$  определим их *джойн*

$$f * g : \Delta_{a+b+1} = \Delta_a * \Delta_b \rightarrow B^p * B^q = B^{p+q+1} \quad \text{формулой} \quad (f * g)(\lambda x \oplus \mu y) := \lambda f(x) \oplus \mu g(y).$$

<sup>30</sup>См. ссылки в §7.5. Теорема 7.5.1 доказана Мабийяром-Вагнером только для  $k \geq 3$ , что достаточно для первых контрпримеров.

Джойн почти  $r$ -вложений является почти  $r$ -вложением.

(b) Если существует почти  $r$ -вложение  $\Delta_N \rightarrow \mathbb{R}^d$ , то существует почти  $r$ -вложение  $\Delta_{N+r-1} \rightarrow \mathbb{R}^{d+1}$ . [Lo, предложение 2.5].

Действительно, пусть  $f : \Delta_N \rightarrow \mathbb{R}^d$  — почти  $r$ -вложение. Отображение  $g$  из  $\Delta_{r-2}$  в точку  $B^0$  является почти  $r$ -вложением. По п. (a), джойн  $f * g : \Delta_{N+r-1} = \Delta_N * \Delta_{r-2} \rightarrow B^d * B^0 = B^{d+1}$  является почти  $r$ -вложением.

(c) Если для некоторых целых  $r, a, d > 0$  существует почти  $r$ -вложение  $\Delta_a \rightarrow \mathbb{R}^d$ , то для любого целого  $k > 0$  существует почти  $r$ -вложение  $\Delta_{k(a+1)-1} \rightarrow \mathbb{R}^{k(d+1)-1}$  [BFZ, лемма 5.2].

Действительно, по п. (a)  $k$ -кратный джойн почти  $r$ -вложения  $\Delta_a \rightarrow B^d$  является почти  $r$ -вложением  $\Delta_{k(a+1)-1} \rightarrow B^{k(d+1)-1}$ .

**Лемма 7.4.2** (О принуждении; Громов-Благоевич-Фрик-Циглер; [Gr10, 2.9.c], [BFZ14, леммы 4.1.iii и 4.2], [Fr15, доказательство теоремы 4]). Если существует почти  $r$ -вложение объединения  $k(r-1)$ -мерных граней симплекса  $\Delta_{(kr+2)(r-1)}$  в  $\mathbb{R}^{kr}$ , то существует почти  $r$ -вложение  $\Delta_{(kr+2)(r-1)} \rightarrow \mathbb{R}^{kr+1}$ .<sup>31</sup>

*Доказательство.* Чтобы сделать это рассуждение более доступным, рассмотрим частный случай  $r = 6$  и  $k = 3$ : если существует почти 6-вложение  $\Delta_{100}^{15} \rightarrow \mathbb{R}^{18}$  объединения 15-мерных граней 100-мерного симплекса, то существует почти 6-вложение самого 100-мерного симплекса в  $\mathbb{R}^{19}$ . Общий случай аналогичен.

Возьмем почти 6-вложение  $\Delta_{100}^{15} \rightarrow \mathbb{R}^{18}$ . Произвольно продолжим его до отображения  $f : \Delta_{100} \rightarrow \mathbb{R}^{18}$ . Обозначим через  $\rho(x)$  расстояние от точки симплекса  $\Delta_{100}$  до его 15-мерного остова  $\Delta_{100}^{15}$ . Достаточно доказать, что  $f \times \rho : \Delta_{100} \rightarrow \mathbb{R}^{19}$  является почти 6-вложением.

Пусть, напротив, некоторые 6 точек  $x_1, \dots, x_6 \in \Delta_{100}$  лежат в попарно несмежных гранях и переходят в одну и ту же точку при  $f \times \rho$ . Размерность одной из этих граней (н.у.о., первой) не превосходит  $\frac{101}{6} - 1$ , поэтому она не превосходит 15. Значит,  $\rho(x_1) = 0$ . Тогда  $\rho(x_2) = \dots = \rho(x_6) = \rho(x_1) = 0$ , т.е.  $x_1, \dots, x_6 \in \Delta_{100}^{15}$ . Поэтому условие  $f(x_1) = \dots = f(x_6)$  противоречит тому, что  $f|_{\Delta_{100}^{15}}$  — почти 6-вложение.  $\square$

**Замечание 7.4.3** (Историческое). Лемма о принуждении 7.4.2 (или, в формулировке Громова, «топологическая теорема Тверберга, когда она верна, влечет теорему ван Кампена–Флореса» [Gr10, 2.9.c, стр. 445, строки –1 и –2]) доказана в [Gr10, 2.9.c, стр. 446, 2й абзац].<sup>32</sup> Эта лемма не относится к основным результатам работы [Gr10].

Эта лемма доказана независимо в [BFZ14, леммы 4.1.iii и 4.2], [Fr15, доказательство теоремы 4]. Опять же, целью работы [BFZ14] была не эта лемма, а ее обобщения — «метод принуждения». Важно, что эти обобщения не используются в опровержении топологической гипотезы Тверберга. Поэтому лемма о принуждении 7.4.2 не сформулирована явно в [BFZ14], но доказана неявно при доказательстве других результатов. Эта лемма не сформулирована явно и в [Fr15, BZ16]. Поэтому лемма доказывалась отдельно для  $r$  степени простого [BFZ14, леммы 4.1.iii и 4.2], [BZ16, §4.1] и для других  $r$  [Fr15, доказательство теорема 4], [BZ16, §5], хотя ни один из этих случаев доказательства леммы не использует того, что  $r$  степень простого или нет.

<sup>31</sup>Эта лемма обобщает замечание 7.2.3.e, в которое лемма превращается при  $r = 2$ .

<sup>32</sup>Формулировку более общего результата, приведенного в [Gr10, 2.9.c, стр. 446], непросто прочитать. Поэтому заметим, что

- число  $T_{top}(q, n)$  есть число топологических тверберговских разбиений, см. [Gr10, стр. 444 сверху и третий абзац п. 2.9.a];
- вместо  $T_{top}(q, n)$  должно быть  $T_{top}(q, n + 1)$ ;
- Лемма о принуждении 7.4.2 получается при  $q := r$ ,  $k := k(r - 1)$ ,  $n := kr$ ,  $N = N_{qn} = N_{nq} := (kr + 2)(r - 1)$ ; используется импликация ' $T_{top}(q, n + 1) > 0 \Rightarrow m(q, n) > 0$ ', а не более сильное неравенство  $[VKF]_q$ .

## 7.5 Algebraic almost $r$ -embeddings

Для формулировки теорем 7.5.1 и 7.5.2 нужны следующие определения.

Пусть  $K$  является  $k(r-1)$ -комплексом и пусть  $f: K \rightarrow \mathbb{R}^{kr} = \text{PL}$  отображение общего положения.

Тогда прообразы  $y_1, \dots, y_r \in K$  произвольной  $r$ -кратной точки  $y \in \mathbb{R}^{kr}$  лежат во внутренностях  $k(r-1)$ -мерных симплексов комплекса  $K$ . Выберем произвольно ориентацию на каждом из этих  $k(r-1)$ -мерных симплексов. Ввиду общности положения,  $f$  аффинно на некоторой окрестности  $U_j$  точки  $y_j$  для любого  $j = 1, \dots, r$ . Возьмем положительный базис из  $k$  векторов в ориентированном нормальном пространстве к ориентированному  $fU_j$ . **Знаком  $r$ -кратного пересечения** точки  $y$  называется знак  $\pm 1$  базиса в пространстве  $\mathbb{R}^{kr}$ , образованном  $r$  такими базисами из  $k$  векторов. (Эта конструкция классическая для  $r = 2$  [BE82] и аналогична для  $r \geq 3$ , ср. [MW15, § 2.2].)

Отображение  $f$  назовем  $\mathbb{Z}$ -почти  $r$ -вложением, если  $f$ -образы любых  $r$  попарно непересекающихся  $(r-1)k$ -симплексов пересекаются в нулевом числе точек с учетом знака, т.е. сумма знаков  $r$ -кратных пересечений всех  $r$ -кратных точек  $y \in f\sigma_1 \cap \dots \cap f\sigma_r$  для некоторых (или, эквивалентно, для любых) ориентаций на этих симплексах  $\sigma_1, \dots, \sigma_r$ .

Ясно, что почти  $r$ -вложение является  $\mathbb{Z}$ -почти  $r$ -вложением.

**Теорема 7.5.1.** *Если  $k \geq 2$  и существует  $\mathbb{Z}$ -почти  $r$ -вложение  $k(r-1)$ -комплекса  $K$  в  $\mathbb{R}^{kr}$ , то существует почти  $r$ -вложение  $K \rightarrow \mathbb{R}^{kr}$ .*

Для  $k \geq 3$  этот результат стандартно следует из [MW15, теорема 7]; в [Sk16, §3] приводится набросок более простого доказательства, которое обобщается на  $k = 2$  [AMS+]. См. замечание 7.5.4.

**Теорема 7.5.2.** *Если  $r$  не степень простого, то существует  $\mathbb{Z}$ -почти  $r$ -вложение объединения  $k(r-1)$ -мерных граней симплекса  $\Delta_{(kr+1)(r-1)}$  (и даже любого  $k(r-1)$ -комплекса) в  $\mathbb{R}^{kr}$ .*

Этот результат вытекает из предложения 8.3.5 и теоремы 8.3.6.

**Следствие 7.5.3** ([MW15, Corollary 5], [AMS+]). *Для любых фиксированных  $k, r$ , таких что  $k+r \geq 5$  существует полиномиальный алгоритм распознавания почти  $r$ -вложимости  $k(r-1)$ -комплексов в  $\mathbb{R}^{kr}$ .*

Это выведено в [MW15, AMS+] из теоремы 7.5.1. Нижеприведенная теорема 8.3.7 имеет аналогичное следствие [FV21].

Было бы интересно ответить на следующие открытые вопросы. Для каких 2-комплексов существует PL отображение в  $\mathbb{R}^3$  без тройных точек? Какие 2-комплексы почти 3-вложимы в  $\mathbb{R}^3$ ? Существуют ли алгоритмы распознавания этих свойств 2-комплексов? Аналогичные вопросы с заменой  $\mathbb{R}^3$  на  $\mathbb{R}^2$ .

**Замечание 7.5.4** (Историческое). Теорема 7.5.1 — наиболее нетривиальная часть опровержения топологической гипотезы Тверберга 7.3.1. Ее случай  $k \geq 3$ , необходимый для построения первого контрпримера, принадлежит Мабийяру и Вагнеру. Их идея похожа на « $h$ -принцип Хефлигера для вложений» [Gr86, 2.1.1, (E), p. 50-51], [Sk06, §5] и на трюк Уитни [RS72, Whitney Lemma 5.12], но отлична от них. (О самом « $h$ -принципе» см. [Gr86, p. 3].) Аналоги  $h$ -принципа Хефлигера для вложений и трюка Уитни для кратности  $r$  «носились в воздухе» с 1960х [Sk06, §5.6]. Ср. с замечанием 7.3.7.d. «Положительные результаты» имелись для зацеплений; тройной трюк Уитни использован С. Мелиховым [Me17, Me18] (ранние версии этих работ имелись с 2007). Проблема [Gr10,

end of 2.9.c, p. 446] (протитированная как [AMS+, Remark 1.12.c]) указывает, что Громов понимал, что теорема 7.3.5.b может быть верна, и задал правильный вопрос. Однако были известны и контрпримеры [Sk06, §5.6]. Поэтому  $r$ -кратный аналог  $h$ -принципа Хейфлигера и трюка Уитни для *почти* вложений — важный вклад Мабийера-Вагнера. Их  $r$ -кратный трюк Уитни включает аналог повышения связности множества самопересечений путем его хирургии [Ha63], [HK98, Theorem 4.5 and appendix A], [CRS, Theorem 4.7 and appendix]. Другими словами, это приклеивание вложенной 1-ручки вдоль пути («*ripping*») с последующим приклеиванием сокращающей вложенной 2-ручки вдоль диска («*unripping*») [Ha62k, §3], [Me17, proof of theorem 1.1 in p. 7]. (Мы применяем [Ha62k, Proposition 3.3] для  $r = 0$  и  $r = 1$ ; оба раза мы переходим от вложения в  $B \times 0$  к вложению в  $B \times 1$ .) Применение этих конструкций нетривиально и является важным достижением Мабийера-Вагнера.

## 8 Применения конфигурационных пространств

### 8.1 Простейшие применения

Конфигурационные пространства полезны как в топологии, так и в других областях математики. Приводимые в §8 применения являются частными случаями более общих методов, полезных и для других задач. Для знакомства с §8 полезно прорешать задачи о непрерывных отображениях из [Sk20, §3.3] (хотя формально они не используются).

Отображения  $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}^n$  подмножества  $X \subset \mathbb{R}^d$  называются  $\varepsilon$ -близкими, если  $|f(x), g(x)| < \varepsilon$  для любого  $x \in X$ .

**Задача 8.1.1.** Эта задача поясняет идею применения конфигурационного пространства, но не используются далее.

(а) Из пункта  $A$  в пункт  $B$  ведут две непересекающиеся дороги (ломаных). Известно, что два человека (точки), соединенные веревкой длины 10м, смогли пройти из  $A$  в  $B$  по разным дорогам, не разорвав веревки. Смогут ли разъехаться круглые возы радиуса 5м, если они едут навстречу друг другу по разным дорогам?

(б) Подмножество  $K$  плоскости не пересекает свой образ при сдвиге на вектор  $a$ , т.е.  $K \cap (K + a) = \emptyset$ . Тогда два круга диаметра  $|a|$  не могут поменяться местами при непрерывном движении их центров по  $K$ , в процессе которого круги не пересекаются.

(с) Подмножество  $K$  плоскости не пересекает свой образ при сдвиге на вектор  $a$ , т.е.  $K \cap (K + a) = \emptyset$ . Тогда центры двух кругов диаметра  $|a|$  не могут замести одинаковое подмножество в  $K$  при их непрерывном движении по  $K$ , в процессе которого круги не пересекаются.

(б')\* [RSS, KS99] То же, что в (б), для дерева  $K$  и с заменой множества  $K + a$  на образ отображения  $f : K \rightarrow \mathbb{R}^2$ , которое  $|a|$ -близко к включению  $K \subset \mathbb{R}^2$ .

(с')\* (нерешенная проблема) То же, что в (с), для дерева  $K$  и с заменой множества  $K + a$  на образ отображения  $f : K \rightarrow \mathbb{R}^2$ , которое  $|a|$ -близко к включению  $K \subset \mathbb{R}^2$ .

Верно ли, что для любого  $\varepsilon > 0$  существует такое  $\delta > 0$ , что для любого дерева  $K$  на плоскости если  $K$  не пересекает свой образ при отображении,  $\delta$ -близком к включению, то две точки на  $K$  не могут замести одинаковое подмножество в  $K$  при их непрерывном движении по  $K$ , в процессе которого расстояние между точками больше  $\varepsilon$ ?

(d) Для любого вложения  $f : T \rightarrow \mathbb{R}^2$  триода  $T := K_{3,1}$  существует такое  $\varepsilon > 0$ , что образ  $f_\varepsilon(T)$  любого  $\varepsilon$ -близкого к  $f$  вложения  $f_\varepsilon : T \rightarrow \mathbb{R}^2$  пересекается с образом  $f(T)$ .

(е) (Теорема Мура) Плоскость не содержит несчетного семейства попарно непересекающихся триодов  $T$ .

Приведем другое доказательство топологической теоремы Радона 7.2.1 (см. также теорему 2.2.2.b и замечания 2.4.1.a). Проиллюстрируем его идею на примере  $d = 1$ , см. замечание 2.4.1.a. Хулиган и полицейский могут двигаться (непрерывно) по границе треугольника так, что в каждый момент времени один из них находится в вершине, а другой на стороне, противоположной этой вершине (в частности, второй может находиться в вершине, являющейся одним из концов этой стороны). Тогда при некотором их начальном положении они смогут поменяться местами. Посмотрев на образы хулигана и полицейского при данном непрерывном отображении, получим теорему 7.2.1 для  $d = 1$ , т.е. результат замечания 2.4.1.a.

Обобщим это доказательство на  $d = 2$  (обобщение для произвольного  $d$  аналогично). Для этого перескажем его на более строгом языке.

**Пример 8.1.2.** Обозначим через  $\widetilde{\Delta}_2$  множество упорядоченных пар  $(x, y)$  точек треугольника  $\Delta_2$ , одна из которых является вершиной, а другая лежит на стороне, противоположной этой вершине.



(a) (Загадка) Представьте множество  $\widetilde{\Delta}_2$  в виде объединения отрезков. Сколько вершин и ребер в полученном графе? А чему он гомеоморфен?

(b) Существует непрерывное отображение  $g = (g_1, g_2) : S^1 \rightarrow \widetilde{\Delta}_2$ , для которого  $g_1(-s) = g_2(s)$  при любом  $s \in S^1$ .

Указание: «представьте»  $S^1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0, x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ .

(c) Имеем  $\widetilde{\Delta}_2 \cong_{\mathbb{Z}_2} S^1$ . Т.е. существует взаимно-однозначное непрерывное отображение  $h : \widetilde{\Delta}_2 \rightarrow S^1$ , для которого  $h(y, x) = -h(x, y)$  при любых  $(x, y) \in \widetilde{\Delta}_2$ . (Непрерывность определена, т.к.  $\widetilde{\Delta}_2 \subset \mathbb{R}^4$ .)

Другое доказательство замечания 2.4.1.a. Пусть, напротив, существует непрерывное отображение  $f : \Delta_2 \rightarrow \mathbb{R}$ , являющееся контрпримером. Определим непрерывное отображение

$$\bar{f} : \widetilde{\Delta}_2 \rightarrow \mathbb{R} - \{0\} \quad \text{формулой} \quad \bar{f}(x, y) := f(x) - f(y).$$

Оно переводит точки  $(x, y)$  и  $(y, x)$  в противоположные. Поэтому его композиция  $\bar{f} \circ g : S^1 \rightarrow \mathbb{R} - \{0\}$  с отображением из утверждения 8.1.2.a переводит точки  $s$  и  $-s$  в противоположные. Это невозможно по теореме о промежуточном значении.  $\square$

**Пример 8.1.3.** Обозначим через  $\widetilde{\Delta}_3$  множество упорядоченных пар  $(x, y)$  точек тетраэдра  $\Delta_3$ , либо

- одна из которых является вершиной, а другая лежит на грани, противоположной этой вершине, либо

- которые лежат на противоположных ребрах

(т.е. точек, лежащих в непересекающихся симплексах).

(a) (Загадка) Представьте множество  $\widetilde{\Delta}_3$  в виде объединения прямоугольников и треугольников. Сколько вершин, ребер и граней в полученном многограннике? А чему он гомеоморфен?

(b) Существует непрерывное отображение  $g = (g_1, g_2) : S^2 \rightarrow \widetilde{\Delta}_3$ , для которого  $g_1(-s) = g_2(s)$  при любом  $s \in S^2$ .

(c)\* Имеем  $\widetilde{\Delta}_3 \cong_{\mathbb{Z}_2} S^2$ . Т.е. существует взаимно-однозначное непрерывное отображение  $h : \widetilde{\Delta}_3 \rightarrow S^2$ , для которого  $h(y, x) = -h(x, y)$  при любых  $(x, y) \in \widetilde{\Delta}_3$ . (Непрерывность определена, т.к.  $\widetilde{\Delta}_3 \subset \mathbb{R}^6$ .)

Другое доказательство теоремы 2.2.2.b. Пусть, напротив, существует непрерывное отображение  $f : \Delta_3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , являющееся контрпримером. Определим непрерывное отображение

$$\bar{f} : \widetilde{\Delta}_3 \rightarrow \mathbb{R}^2 - \{0\} \quad \text{формулой} \quad \bar{f}(x, y) := f(x) - f(y).$$

Оно переводит точки  $(x, y)$  и  $(y, x)$  в противоположные. Поэтому его композиция  $\bar{f} \circ g : S^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 - \{0\}$  с отображением из утверждения 8.1.3.a переводит точки  $s$  и  $-s$  в противоположные. Это невозможно по теореме Борсука—Улама 6.5.4 (для  $d = 2$ ).  $\square$

**Hint to 8.1.1.** (b,c) Для любых точек  $X, Y \in K$ , расстояние между которыми больше  $|a|$ , определим отношение ' $<$ '. (Это отношение не обязательно будет транзитивным, т.е. условия  $A < B$  и  $B < C$  не обязательно влекут  $A < C$ .) Для этого возьмем точки  $X$  и  $Y + a$ . Будем двигать первую из них по  $K$  из  $X$  в  $Y$  вдоль кратчайшей дуги  $l$ , а вторую — по  $K + a$  из  $Y + a$  в  $X + a$  вдоль дуги  $l + a$ . Если вектор, направленный от первой точки ко второй, повернулся по часовой стрелке, то положим  $X < Y$ , а если против — положим  $Y < X$ . Утверждения (b,c) вытекают из того, что это отношение

- действительно определено для любых точек  $X, Y \subset K$ , расстояние между которыми больше  $|a|$  (т.е. вектор обязательно повернется, а не останется на месте);

- непрерывно зависит от точек  $X, Y$ .

(b') Аналогично вышеприведенному. Для любых точек  $X, Y \in K$ , расстояние между которыми больше  $|a|$ , определим отношение ' $<$ '. Рассмотрим движение двух точек — одной в  $K$ , а другой в  $f(K)$ . В первый момент времени они совпадают с точками  $X$  и  $f(Y)$ , соответственно. Затем первая точка движется вдоль дуги  $l \subset K$  от  $X$  к  $Y$ , а вторая точка движется вдоль дуги  $f(l) \subset f(K)$  от  $f(Y)$  к  $f(X)$ . Если вектор, смотрящий от первой точки ко второй, повернется по часовой стрелке, то положим  $X < Y$ ; если против, то положим  $Y < X$ .

(d) Возьмем число  $\varepsilon$  настолько малым, что на триоде  $f(T)$  можно поменять местами две точки путем их непрерывного движения, в процессе которого расстояние между ними больше  $\varepsilon$ . Тогда утверждение вытекает из п. (b').

(e) Любое несчетное подмножество в полном пространстве замкнутых ограниченных подмножеств плоскости содержит сходящуюся последовательность. Поэтому теорема Мура вытекает из п. (d).

**Hint to 8.1.2.a, 8.1.3.b.** Существует непрерывное отображение (даже гомеоморфизм)

$$S^d \rightarrow S_0^d := \{(x_1, \dots, x_{d+2}) \in \mathbb{R}^{d+2} : x_1 + \dots + x_{d+2} = 0, x_1^2 + \dots + x_{d+2}^2 = 1\},$$

переводящее антиподы в антиподы. Поэтому достаточно доказать утверждение с заменой  $S^d$  на  $S_0^d$ . For  $x = (x_1, \dots, x_{d+2}) \in \mathbb{R}^{d+2}$  let  $x_+ \in \mathbb{R}^{d+2}$  ( $x_- \in \mathbb{R}^{d+2}$ ) be the vector obtained from  $x$  by replacing all negative (all positive) coordinates with zeros. Let  $|x| = |x_1| + \dots + |x_{d+2}|$ . Define a map

$$g : S^d \rightarrow \widetilde{\Delta}_{d+1} \quad \text{by} \quad g(x) = (g_1(x), g_2(x)) := (x_+ / |x_+|, -x_- / |x_-|).$$

Since  $|x_+| = |x_-|$ , we have  $g_1(-x) = g_2(x)$ .

**Hint to 8.1.3.** (c) Представьте (ср. [?, §1.9, рис. 13])

$$\widetilde{\Delta}_3 = D_+^2 \cup \widetilde{\Delta}_2 \times D^1 \cup D_-^2, \quad \text{где} \quad \widetilde{\Delta}_2 \cong S^1 \quad \text{и} \quad \partial D_\pm^2 \cap \widetilde{\Delta}_2 \times D^1 = \widetilde{\Delta}_2 \times \pm 1.$$

## 8.2 Конфигурационные пространства и вложимость комплексов

Проверять планарность графов (и даже комплексов) проще без конфигурационных пространств — например, по теореме Куратовского 1.2.3.e (и Халина-Юнга 6.13.1). Однако для вложений комплексов размерности большей двух аналога теоремы Куратовского (и Халина-Юнга) просто нет, а вот метод конфигурационных пространств хорошо работает (см. теорему 8.2.4 и замечание 8.2.5.b).

**Геометрическим взрезанным квадратом**  $\widetilde{N}$  подмножества  $N \subset \mathbb{R}^d$  называется квадрат множества  $N$  без диагонали:

$$\widetilde{N} := \{(x, y) \in N \times N : x \neq y\},$$

См. рис. 8.2.1. Это конфигурационное пространство упорядоченных пар различных точек в  $N$ . Другие обозначения:  $\widetilde{N}^2$ ,  $N_\Delta^{\times, 2}$ ,  $N^{\underline{2}}$ .

**Симплициальным взрезанным квадратом** комплекса  $K$  называется множество

$$\widetilde{K} := \cup \{\sigma \times \tau : \sigma, \tau - \text{ грани комплекса } K, \sigma \cap \tau = \emptyset\}.$$

Т.е.  $\widetilde{K}$  — подкомплекс комплекса  $K \times K$ , полученный удалением всех «открытых клеток»  $\text{Int}(\sigma \times \tau)$ , содержащих хотя бы одну «диагональную» вершину. Это понятие фактически появилось в замечании 2.4.1 и в §§1.6, 1.5, 8.1. Утверждения 8.1.2.b и 8.1.3.c «описывают» симплициальные взрезанные квадраты границ треугольника и тетраэдра.

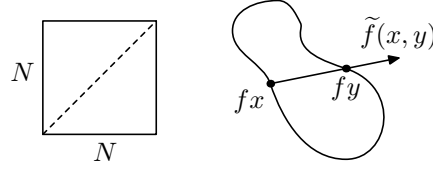


Рис. 8.2.1: Взрезанный квадрат и отображение Гаусса

**Задача 8.2.1.** (Загадка) Какому из известных Вам графов или комплексов PL гомеоморфен симплициальный взрезанный квадрат

- (а) пути с  $n$  вершинами; (б) цикла с  $n$  вершинами; (с) триода  $K_{1,3}$ ;  
 (д) графа  $K_4$ ; (е) графа  $K_{2,3}$  ( $\theta$ -графа); (ф) графа  $K_5$ ; (г) графа  $K_{3,3}$ ;  
 (h) кнопки (или зонтика), т.е. комплекса  $K_{VI}$  на рис. 6.3.1?

Пусть  $f : N \rightarrow \mathbb{R}^d$  — вложение подмножества  $N \subset \mathbb{R}^m$ . Тогда отображение  $\tilde{f} : \tilde{N} \rightarrow S^{d-1}$  корректно определено формулой Гаусса (рис. 8.2.1)

$$\tilde{f}(x, y) = \frac{f(x) - f(y)}{|f(x) - f(y)|}.$$

Ясно, что  $\tilde{f}(y, x) = -\tilde{f}(x, y)$ . Отображение  $f : \tilde{N} \rightarrow S^{d-1}$  называется *эквивариантным* (относительно инволюции  $(x, y) \mapsto (y, x)$  на  $\tilde{N}$ , переставляющей сомножители, и антиподальной инволюции на  $S^{d-1}$ ), если  $\tilde{f}(y, x) = -\tilde{f}(x, y)$  для любых  $(x, y) \in \tilde{N}$ . Итак, существование эквивариантного отображения  $\tilde{N} \rightarrow S^{d-1}$  — необходимое условие для вложимости  $N$  в  $\mathbb{R}^d$ .

**Задача 8.2.2.** There is an equivariant map

- (а)  $S^{d-1} \rightarrow \mathbb{R}^d$ ; (б)  $S^d \rightarrow \tilde{S}^d$ ; (с)  $\mathbb{R}^d \rightarrow S^{d-1}$ ; (д)  $\tilde{S}^d \rightarrow S^d$ .

(The maps of (a,b) are in fact inclusions. The maps you construct in Assertions 8.2.2.c,d, 8.2.3.c, 8.2.6, 8.3.4, 8.4.1 are in fact *equivariant strong deformation retractions*.)

**Задача 8.2.3.** (а) PL гомеоморфизмы из решения задач 8.2.1 можно выбрать так, чтобы они переводили отображение «перестановку сомножителей»  $\tilde{K} \rightarrow \tilde{K}$  в «антиподальное» отображение (на известном Вам графе или комплексе).

(b) For a complex  $K$  there is an equivariant surjective map  $\widetilde{\text{Con } K} \rightarrow \Sigma \tilde{K}$  whose only non-trivial preimages are those of the vertices of the suspension and are  $c \times K$  and  $K \times c$ , where  $c$  is the vertex of the cone and  $K$  is identified with the base of the cone. [Sk02, the Cone Lemma 4.1.a]

(с) For a complex  $K$  there is an equivariant map  $\widetilde{|K|} \rightarrow \tilde{K}$ .

**Теорема 8.2.4** (Вебер). Если для  $k$ -комплекса  $K$  существует эквивариантное отображение  $\tilde{K} \rightarrow S^{d-1}$  и либо  $2d \geq 3k + 3$ , либо  $d \leq 2$ , то  $K$  PL вложим в  $\mathbb{R}^d$ .

**Замечание 8.2.5.** (а) Для  $d \leq 2$  критерий 8.2.4 следует [Wu65, SSS] из критерия Куратовского 1.2.3.e (Халина-Юнга 6.13.1) планарности графов (комплексов), результатов задач 8.2.1.fgh и 8.2.3.a, а также теоремы Борсука-Улама 6.5.4. Случай  $2d \geq 3k + 3$  гораздо более сложный. Первый шаг — аналог критерия 8.2.4 для *почти вложений* (определенных в §6.10; см. (b)), второй — теорема Вебера 6.10.3.a.

(b) If a complex  $K$  is almost embeddable in  $\mathbb{R}^d$ , then there is an equivariant map  $\tilde{K} \rightarrow S^{d-1}$ . For  $2d \geq 3k + 3$  this necessary condition is sufficient. This analogue of the Weber Theorem 8.2.4 is the first step in its proof.

Другие аналоги теоремы 8.2.4 обсуждаются в §8.6 и в обзоре [Sk06, §5, §8].

(с) Для комплекса  $K$  можно построить алгебраическое препятствие к существованию эквивариантного отображения  $\tilde{K} \rightarrow S^{d-1}$ , используя теорию препятствий, основы которой изложены в §9. (Для  $d = 2 \dim K$  это препятствие равно препятствию ван Кампена, §§1.5, 6.8, 6.9.) Так и доказывается теорема 6.6.1.

(d) If  $\max\{3, k\} \leq d \leq \frac{3k}{2} + 1$ , then there is a  $k$ -complex  $K$  not PL embeddable in  $\mathbb{R}^d$  but for which there is an equivariant map  $\tilde{K} \rightarrow S^{d-1}$  ([SSS, GS06], see also [SS92, FKT]).

(e) Assume that  $P \neq NP$ . If  $k + 2 \leq d \leq \frac{3k}{2} + 1$ , then there is a  $k$ -complex  $K$  not almost embeddable in  $\mathbb{R}^d$  but for which there is an equivariant map  $\tilde{K} \rightarrow S^{d-1}$  [ST17, A122].

Let us define a ‘quantum analogue’ of the deleted product (to be used in §8.4).

The **geometric deleted join**  $N_{\Delta}^{*2}$  of a subset  $N \subset \mathbb{R}^n$  is

$$N * N - \left\{ \frac{1}{2}x \oplus \frac{1}{2}x : x \in N \right\}.$$

Отображение  $f : N_{\Delta}^{*2} \rightarrow S^d$  называется *эквивариантным*, если

$$f((1-t)y \oplus tx) = -f((tx \oplus (1-t)y)).$$

**Задача 8.2.6.** There is an equivariant map  $(\mathbb{R}^d)_{\Delta}^{*2} \rightarrow S^d$ .

Denote by  $A'$  a copy of  $A$ . The **simplicial deleted join**  $K_{\Delta}^{*2}$  of a complex  $K = (V, F)$  is the complex with the set  $V \sqcup V'$  of vertices and the set  $\{\sigma \sqcup \tau' : \sigma, \tau \in F, \sigma \cap \tau = \emptyset\}$  of faces.

**Задача 8.2.7.** (Загадка) Какому из известных Вам графов или комплексов PL го-меоморфен симплициальный взрезанный джойн комплекса

- (a) the  $n$ -element set for  $n = 1, 2, 3$ ; (b)  $\Delta_k \cong D^k$ ; (c)  $\partial\Delta_{k+1} \cong S^k$ ; (d)  $[3]^{*k}$ ;  
(e)\*  $K_5$ ; (f)\*  $\Delta_{2k+2}^k$ ?

(Hint to (b,c,d): prove and use Assertion 8.2.8.a. Warning to (c):  $\partial\Delta_{k+1} \neq [2]^{k+1}$ .)

**Задача 8.2.8.** Let  $K$  and  $L$  be complexes.

(a)  $(K * L)_{\Delta}^{*2} = K_{\Delta}^{*2} * L_{\Delta}^{*2}$ .

(b) The deleted join contains the deleted product.

(c)  $K_{\Delta}^{*2} \cong_{\mathbb{Z}_2} \widetilde{\text{Con}} K$  (cf. Assertion 8.2.3.b).

**Ответы к 8.2.1.** (c)  $S^1$ ; (f) сфере с 6 ручками; (g) сфере с 4 ручками; (h)  $S^2$ .

Указание к (f,g). Проверьте, что взрезанный квадрат является замкнутым локально евклидовым 2-комплексом (см. задачу 6.14.1), т.е. замкнутым 2-многообразием. Вычислите его эйлерову характеристику и докажите его ориентируемость. Ориентируемость следует, например, из вложимости взрезанного квадрата во взрезанный джойн, который гомеоморфен  $S^3$ .

**Hint to 8.2.3.c.** [Sh57, Lemma 2.1], cite[§4]Hu60. Denote

$$E_{\sigma\tau} := \cup\{U_{\sigma} \times U_{\tau} : U_{\sigma}, U_{\tau} \text{ non-empty faces of } \sigma, \tau, \text{ respectively, and } U_{\sigma} \cap U_{\tau} = \emptyset\}.$$

Then  $\sigma \times \tau \cong E_{\sigma\tau} * \text{diag}(\sigma \cap \tau)$ . So for  $\sigma \cap \tau \neq \emptyset$  there is an equivariant strong deformation retraction  $\sigma \times \tau - \text{diag}(\sigma \cap \tau) \rightarrow E_{\sigma\tau}$ . These retractions agree on intersections, so together they form the required map (retraction).

- Ответы к 8.2.7.** (a)  $[2], [2] \times [0, 1], S^1$ ; (b)  $S^k$ ; (c)  $S^k \times [0, 1]$ ; (d)  $S^{2k-1}$ ;  
(e)  $S^3$ ; (f)  $S^{2k+1}$  [Ma03, §5].

### 8.3 Конфигурационное пространство наборов $r$ точек

**Задача 8.3.1.** Александр, Борис и Владимир стоят в вершинах  $A, B$  и  $C$  тетраэдра  $ABCD$ . Они могут непрерывно двигаться по ребрам тетраэдра так, что в каждый момент двое из них стоят в различных вершинах, а третий — на противоположном ребре. Могут ли они перейти в вершины  $D, B$  и  $A$ , соответственно?

**Задача 8.3.2.** Обозначим через  $\widetilde{\Delta}_N^3$  множество упорядоченных пар троек  $(x, y, z)$  точек в  $\Delta_N$ , лежащих в попарно непересекающихся гранях. Тогда

(1)  $\widetilde{\Delta}_1^3 = \emptyset$ .

(2) В множестве  $\widetilde{\Delta}_2^3$  6 элементов.

(3) Множество  $\widetilde{\Delta}_3^3$  — связный граф с 24 вершинами степени 3 (граф Кнезера пересечений по два трехэлементных подмножеств четырехэлементного множества).

(4) Множество  $\widetilde{\Delta}_4^3$  — объединение треугольников и квадратов, образующее двумерный полиэдр (не являющийся многообразием).

(5) Множество  $\widetilde{\Delta}_N^3$  — объединение произведений симплексов, причем размерность каждого произведения не более  $N - 2$ .

*Симплициальной взрезанной  $r$ -й степенью* комплекса  $K$  называется

$$\widetilde{K}^r := \cup \{ \sigma_1 \times \dots \times \sigma_r : \sigma_i \text{ грань комплекса } K, \sigma_i \cap \sigma_j = \emptyset \text{ для любых } i \neq j \},$$

т.е. объединение произведений  $\sigma_1 \times \dots \times \sigma_r$  попарно непересекающихся граней.

Подмножество  $\widetilde{K}^r \subset K^r$  не имеет естественной структуры комплекса. Однако  $\widetilde{K}^r$  является объединением произведений симплексов с «хорошими» пересечениями, поэтому  $\widetilde{K}^r$  — тело некоторого комплекса (см. задачу 6.17.4.a).

Обозначим через  $\Sigma_r$  группу перестановок  $r$  элементов. Эта группа естественно действует на множестве  $\widetilde{K}^r$ , переставляя точки в наборе  $(p_1, \dots, p_r)$ . Ясно, что это действие свободно и кусочно-линейно, т.е. согласовано с некоторой структурой комплекса на  $\widetilde{K}^r$ .

Let  $\mathbb{R}^{d \times r} := (\mathbb{R}^d)^r$  be the set of real  $d \times r$ -matrices. Группа  $\Sigma_r$  действует на  $\mathbb{R}^{d \times r}$  перестановкой столбцов. Denote

$$\text{diag}_r := \{ (x, x, \dots, x) \in \mathbb{R}^{d \times r} : x \in \mathbb{R}^d \}.$$

**Утверждение 8.3.3.** (a) Если комплекс  $K$  почти  $r$ -вложим в  $\mathbb{R}^d$ , то существует  $\Sigma_r$ -эквивариантное отображение  $\widetilde{K}^r \rightarrow \mathbb{R}^{d \times r} - \text{diag}_r$ .

(b) Если  $k(r-1)$ -комплекс  $K$  является  $\mathbb{Z}$ -почти  $r$ -вложимым в  $\mathbb{R}^{kr}$  (см. определение в §7.5), то существует  $\Sigma_r$ -эквивариантное отображение  $\widetilde{K}^r \rightarrow \mathbb{R}^{kr \times r} - \text{diag}_r$ .

Обозначим через  $S_{\Sigma_r}^{d(r-1)-1} \subset \mathbb{R}^{d \times r}$  множество всех тех матриц, для которых сумма чисел в любой строке равна нулю, и сумма квадратов всех чисел в матрице равна 1. Это множество гомеоморфно сфере размерности  $d(r-1) - 1$ . Оно инвариантно относительно действия группы  $\Sigma_r$ .

**Утверждение 8.3.4.** *There is a  $\Sigma_r$ -equivariant map  $\mathbb{R}^{d \times r} - \text{diag}_r \rightarrow S_{\Sigma_r}^{d(r-1)-1}$ .*

Это доказывается аналогично приведенному в §8.2 рассуждению для  $r = 2$  и утверждению 8.4.1.b.

**Утверждение 8.3.5.** *Существует  $\mathbb{Z}$ -почти  $r$ -вложение  $k(r-1)$ -комплекса  $K$  в  $\mathbb{R}^{kr}$  тогда и только тогда, когда существует  $\Sigma_r$ -эквивариантное отображение  $\widetilde{K}^r \rightarrow S_{\Sigma_r}^{kr(r-1)-1}$ .*

Утверждение 8.3.5 является обобщением [MW15, § 4.1 and Corollary 44] известных результатов. См. простое изложение доказательства в [Sk16, §3].

**Теорема 8.3.6** ([AKS, Theorem 6]). *Если  $r$  не степень простого и  $X$  является комплексом со свободным симплицальным действием группы  $\Sigma_r$ , то существует  $\Sigma_r$ -эquivарантное отображение  $X \rightarrow S_{\Sigma_r}^{2(r-1)-1}$ .*

Версия для  $\dim X = d(r-1)$  и отображения  $X \rightarrow S_{\Sigma_r}^{d(r-1)-1}$  теоремы 8.3.6 принадлежит Езайдыну [Oz]. (Эта версия сформулирована не в [Oz], а в [MW14, p. 173, the paragraph before Theorem 3]; ее несложный вывод из [Oz] приведен в [Fr15, proof of Corollary 3].) В [Sk16, §3] приводится короткое прямое изложение доказательства этой версии. Для теоремы 7.5.2 достаточно этой версии при  $d = kr$  (поскольку для  $k(r-1)$ -комплекса  $K$  выполнено  $\dim \tilde{K}^r \leq r \dim K = kr(r-1)$ ).

**Теорема 8.3.7.** *Пусть  $K$  есть  $k$ -комплекс и либо  $rd \geq (r+1)k+3$ , либо  $d = 2r = k+2 \neq 4$ . Почти  $r$ -вложение  $K \rightarrow \mathbb{R}^d$  существует тогда и только тогда, когда существует  $\Sigma_r$ -эquivарантное отображение  $\tilde{K}^r \rightarrow S_{\Sigma_r}^{d(r-1)-1}$ .*

Случай  $(r-1)d = rk$  теоремы 8.3.7 доказан в [MW15, AMS+]; этот случай покрывается теоремой 7.5.1 и утверждением 8.3.5. Общий случай доказан в [Sk17], см. также [MW16, Sk17o].

**Замечание 8.3.8.** (a) *Геометрической взрезанной  $r$ -й степенью* подмножества  $N \subset \mathbb{R}^d$  называется

$$\tilde{N}^r := \{(x_1, \dots, x_r) \in N^r : x_i \neq x_j \text{ для любого } i \neq j\}.$$

Это конфигурационное пространство упорядоченных наборов длины  $r$  различных точек в  $N$ . Удобным обозначением для  $\tilde{N}^r$  было бы  $N^{\neq}$ , поскольку через  $n^{\neq} := n(n-1)\dots(n-r+1)$  обозначается количество упорядоченных наборов длины  $r$  различных точек в  $n$ -элементном множестве (т.е. размещений из  $n$  по  $r$ ).

Observe that  $\mathbb{R}^{d \times r} - \text{diag}_r \neq \tilde{\mathbb{R}^d}^r$  for  $r \geq 3$ .

(b) Let  $r$  be an integer,  $N$  a closed manifold, and  $B \subset N$  a codimension 0 ball. Then there is a  $\Sigma_r$ -equivariant map  $\tilde{N}^r \rightarrow \tilde{N}_B^r := \{(x_1, \dots, x_r) \in \tilde{N}^r : |\{x_1, \dots, x_r\} \cap \text{Int } B| \leq 1\}$ .

(c) (conjecture) For a map  $f : |K| \rightarrow Z$  of a complex  $K$  denote  $\widetilde{|K|}_f^r := \{(x_1, \dots, x_r) \in |K|^r : fx_i \neq fx_j \text{ for each } i, j\}$ . For a 2-complex  $K$  take 2-faces  $\sigma, \tau$  intersecting by a vertex. Take points  $A_1, A_2 \in \text{Int } \sigma$  and  $B_1, B_2 \in \text{Int } \tau$ . Let  $f : |K| \rightarrow |K|/(A_1 \sim B_1, A_2 \sim B_2)$  be the quotient map. Then there is a  $\Sigma_r$ -equivariant map  $\widetilde{|K|}_f^r \rightarrow \widetilde{|K|}_f^r$ .

It suffices to prove the following stronger assertion. Let  $r$  be an integer,  $K$  a  $k$ -complex, and  $B \subset |K|$  the union of two  $k$ -balls in the interiors of two  $k$ -faces of  $K$  intersecting by a vertex. Then there is a  $\Sigma_r$ -equivariant map  $\widetilde{|K|}_f^r \rightarrow \widetilde{|K|}_B^r$ .

## 8.4 Proof of the topological Tverberg Theorem 7.3.2.a for $r$ a prime

The *simplicial  $r$ -tuple deleted join* of a complex  $K$  is

$$K_{\Delta}^{*r} := \cup \{\sigma_1 * \dots * \sigma_r : \sigma_i \text{ a face of } K, \sigma_i \cap \sigma_j = \emptyset \text{ for all } i \neq j\}.$$

Denote

$$\text{diag}_r^+ := \left\{ \frac{1}{r}x \oplus \dots \oplus \frac{1}{r}x \in (\mathbb{R}^d)^{*r} : x \in \mathbb{R}^d \right\}.$$

On  $K_{\Delta}^{*r}$  and on  $(\mathbb{R}^d)^{*r} - \text{diag}_r^+$  the symmetric group  $\Sigma_r$  acts by permuting the ‘factors’  $t_1x_1, \dots, t_r x_r$ . Consider  $\mathbb{Z}_r$  as the subgroup of cyclic permutations in  $\Sigma_r$ . An action is called *free* if the map corresponding to any non-identical element has no fixed points.

**Утверждение 8.4.1** (proof is postponed). (a) If  $K$  is a complex almost  $r$ -embeddable to  $\mathbb{R}^d$ , then there is a  $\Sigma_r$ -equivariant map  $K_{\Delta}^{*r} \rightarrow (\mathbb{R}^d)^{*r} - \text{diag}_r^+$ .

(b) There is a  $\Sigma_r$ -equivariant map  $(\mathbb{R}^d)^{*r} - \text{diag}_r^+ \rightarrow S_{\Sigma_r}^{(d+1)(r-1)-1}$ .

(c) For  $k = (d+1)(r-1)$  even there are a free action of  $\mathbb{Z}_r$  on  $S^{k-1}$  (which is not necessarily the restriction of the action of  $\Sigma_r$ ) and a null-homotopic  $\mathbb{Z}_r$ -equivariant map  $S^{k-1} \rightarrow (\Delta_k)_{\Delta}^{*r}$ .

(d) For any free action of  $\mathbb{Z}_r$  on  $S^{k-1}$  there is a  $\mathbb{Z}_r$ -equivariant map  $S_{\Sigma_r}^{k-1} \rightarrow S^{k-1}$ .

**Теорема 8.4.2** ( $r$ -fold Borsuk-Ulam Theorem). For any free PL action of  $\mathbb{Z}_r$  on  $S^n$  no  $\mathbb{Z}_r$ -equivariant map  $S^n \rightarrow S^n$  is null-homotopic.

*Sketch of the proof.* Take a map  $\omega : S^n \rightarrow S^n$  generating the action. Since the action is PL, there is a triangulation of  $S^n$  for which  $\omega$  is simplicial. Take a minimal set  $F$  of  $n$ -simplices such that  $F \cup \omega F \cup \dots \cup \omega^{r-1} F$  is the set of all  $n$ -simplices. We may assume that the given map  $g : S^n \rightarrow S^n$  is identical on the  $(n-1)$ -skeleton. Then the proof is analogous to [Sk20, problem 8.3.8], replacing  $D_+, D_-$  by  $\cup F, \omega(\cup F), \dots, \omega^{r-1}(\cup F)$  and obtaining  $\deg g \equiv 1 \pmod r$  (see details in [BSS, Lemma 2], [Ma03, p. 153-154]; the formulation in that book is more sophisticated, not only more general).  $\square$

*Proof of Theorem 7.3.2.a for a prime  $r$ .* Denote  $k := (d+1)(r-1)$ . Suppose to the contrary that  $f : \Delta_k \rightarrow \mathbb{R}^d$  is an almost  $r$ -embedding. Since  $r$  is prime, either  $r = 2$  or  $k$  is even. Take the composition  $g : S_{\Sigma_r}^{k-1} \rightarrow S_{\Sigma_r}^{k-1}$  of  $\mathbb{Z}_r$ -equivariant maps from Propositions 8.4.1.abcd. (For  $r = 2$  instead of Proposition 8.4.1.c we apply the result of Problem 8.2.7.b.) Since the map of Proposition 8.4.1.c is null-homotopic,  $g$  is null-homotopic. Since  $r$  is a prime, the action of  $\mathbb{Z}_r$  on  $S_{\Sigma_r}^{k-1}$  is free. This contradicts Theorem 8.4.2.  $\square$

*Proof of Proposition 8.4.1.* (a) For an almost  $r$ -embedding  $f : \Delta_k \rightarrow \mathbb{R}^d$  define the map  $f^{*r}$  by  $f^{*r}(t_1 x_1 \oplus \dots \oplus t_r x_r) := t_1 f(x_1) \oplus \dots \oplus t_r f(x_r)$ . Clearly,  $f^{*r}$  is  $\Sigma_r$ -equivariant.

(b) For  $x \in \mathbb{R}^d$  let  $x^+ := (1, x) \in \mathbb{R}^{d+1}$ . For  $x_1, \dots, x_r \in \mathbb{R}^d$  and  $t_1, \dots, t_r \in [0, 1]$  such that  $t_1 + \dots + t_r = 1$  and pairs  $(x_1, t_1), \dots, (x_r, t_r)$  are not all equal define

$$m^+ := t_1 x_1^+ + \dots + t_r x_r^+, \quad y_j^+ := t_j x_j^+ - \frac{m^+}{r} \quad \text{and} \quad \pi^+ := \frac{y^+}{|y^+|}.$$

Then  $\pi^+ : (\mathbb{R}^d)^{*r} - \text{diag}_r^+ \rightarrow S_{\Sigma_r}^{(d+1)(r-1)-1}$  is the required map.

(c) In this paragraph we construct an isomorphism

$$A : (\Delta_k)_{\Delta}^{*r} \rightarrow [r]^{*k+1}.$$

Faces of  $(\Delta_k)_{\Delta}^{*r}$  correspond to  $r$ -tuples of pairwise disjoint (possibly, empty) subsets of  $[k+1]$ . The incidence table of such an  $r$ -tuple is a disposition of stars in the  $r \times (k+1)$ -table such that every column has at most one star. Such tables are in 1-1 correspondence with faces of  $[r]^{*k+1}$ . (In another language this is an application of Assertion 6.16.2.a and an  $r$ -fold analogue of Assertion 8.2.8.a.)

Consider the permutation action of  $\Sigma_r$  on  $[r]$ , and the joinpower action of  $\Sigma_r$  on  $[r]^{*k+1}$ . Clearly,  $A$  is a  $\Sigma_r$ -isomorphism.

Take a  $\mathbb{Z}_r$ -invariant cycle  $S$  in the graph  $[r] * [r] = K_{r,r}$ . (For  $r = 3$  we can take  $S = [3]_{\Delta}^{*2}$ .) Then the subset  $S^{*k/2} \subset [r]^{*k} \subset [r]^{*k+1}$  is  $\mathbb{Z}_r$ -invariant. By Assertion 6.16.3.b there is a PL homeomorphism  $h : S^{*k/2} \rightarrow S^{k-1}$ . Take the action of  $\mathbb{Z}_r$  on  $S^{k-1}$  that is the ‘ $h$ -image’ of the action on  $[r]^{*k+1}$  restricted to  $S^{*k/2}$ , so that  $h$  is  $\mathbb{Z}_r$ -equivariant. Then the required map is  $A^{-1} \circ h^{-1}$ . The sphere  $S^{*k/2}$  bounds the disk  $S^{*k/2} * \{1\} \subset [r]^{*k+1}$ . Hence the restriction of  $A^{-1}$  to  $S^{*k/2}$  is null-homotopic. Hence  $A^{-1} \circ h^{-1}$  is null-homotopic.

(d) Take a triangulation of  $S_{\Sigma_r}^{k-1}$  for which the action of  $\mathbb{Z}_r$  is simplicial. Construct a  $\mathbb{Z}_r$ -equivariant map  $S_{\Sigma_r}^{k-1} \rightarrow S^{k-1}$  by  $j$ -skeleta starting from  $j = 0$ . Когда на границе грани отображение уже определено, то на грань оно продолжается ввиду  $(k - 2)$ -связности сферы  $S^{k-1}$ . Потом отображение продолжается на  $\mathbb{Z}_r$ -орбиту этой грани по  $\mathbb{Z}_r$ -эквивариантности.  $\square$

**Замечание 8.4.3.** (a) A null-homotopic  $\mathbb{Z}_r$ -equivariant map  $S_{\Sigma_r}^{k-1} \rightarrow (\Delta_k)_{\Delta}^{*r}$  of Proposition 8.4.1.cd can be alternatively constructed using the  $\mathbb{Z}_r$ -isomorphism  $A$  from the proof of Proposition 8.4.1.c and Assertion 6.16.4.b. The construction is by  $j$ -skeleta starting from  $j = 0$ , analogously to the proof of Proposition 8.4.1.cd. This argument requires Seifert-van Kampen, Hurewicz and Mayer-Vietoris theorems on homology and homotopy groups (for Assertion 6.16.4.b) instead of elementary argument from Proposition 8.4.1.c.

(b) Let us sketch (for  $r$  odd) an idea of an alternative explicit construction of a null-homotopic  $\mathbb{Z}_r$ -equivariant map  $S_{\Sigma_r}^{k-1} \rightarrow (\Delta_k)_{\Delta}^{*r}$  of Proposition 8.4.1.cd. We consider the case  $d = 0$ , the case of arbitrary  $d$  is analogous. Identify with  $S^1$  any  $\mathbb{Z}_r$ -invariant cycle in the graph  $[r] * [r] = K_{r,r}$ . (For  $r = 3$  we can take  $S = [3]_{\Delta}^{*2}$ .) Let  $\rho := (r - 1)/2$ . Define a map

$$h'' : (S^1)^{*r} \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{by} \quad h''(t_1 z_1 \oplus \dots \oplus t_{\rho} z_{\rho}) = \operatorname{Re}(t_1 z_1 + e^{2\pi i/r} t_2 z_2 + \dots + e^{2\pi i(\rho-1)/r} t_{\rho} z_{\rho}).$$

Take the corresponding  $\mathbb{Z}_r$ -equivariant map  $h' : (S^1)^{*r} \rightarrow \mathbb{R}^r$ , where  $\mathbb{Z}_r$  acts on  $\mathbb{R}^r$  by cyclic permutation of the coordinates, and on  $(S^1)^{*r}$  by rotating every join-coordinate through  $2\pi/r$ . The image of  $h'$  misses the zero, and is contained in the subspace  $H$  formed by vectors with zero sum of coordinates. Let  $h$  be the composition of  $h'$  with the projection  $H - \{0\} \rightarrow S_{\Sigma_r}^{r-2}$ . One can check that  $h$  is a homeomorphism (cf. Assertion 6.16.3.b; hopefully one can simply write ‘inverse’ formulas for a  $\mathbb{Z}_r$ -equivariant map  $S_{\Sigma_r}^{r-2} \rightarrow (S^1)^{*r}$ , and do not care if this map is 1–1). The required map is the composition  $A^{-1} \circ h^{-1}$ .

(c) Proof of Proposition 8.4.1.c is interpreted as follows.

An ordered partition  $(R_1, R_2, R_3)$  of  $[6] = R_1 \sqcup R_2 \sqcup R_3$  into three sets (possibly empty) is called *spherical* if no set  $R_1, R_2, R_3$  contains any of the subsets  $\{1, 2\}, \{3, 4\}, \{5, 6\}$ . E.g. there are  $6^3 = 216$  cyclic partitions. (Indeed, each of the pairs  $\{1, 2\}, \{3, 4\}, \{5, 6\}$  can be distributed in 6 ways.) The union of 5-simplices of  $\Delta_5^{*3} := \Delta_5 * \Delta_5 * \Delta_5$  corresponding to spherical partitions is PL homeomorphic to  $S^5$ .

Generally, for  $k$  even an ordered partition  $(R_1, \dots, R_r)$  of  $[k] = R_1 \sqcup \dots \sqcup R_r$  into  $r$  sets (possibly empty) is called *spherical* if for every  $j = 1, \dots, k/2$  if  $2j - 1 \in R_s$ , then  $2j \in R_{s-1} \cup R_{s+1}$ , where the  $r$  sets are numbered modulo  $r$ . Or, less formally, if consecutive odd and even integers are contained in consecutive sets. The union of  $(k - 1)$ -simplices of  $\Delta_{k-1}^{*r}$  corresponding to spherical partitions is PL homeomorphic to  $S^{k-1}$ .

The union of  $k$ -simplices of  $\Delta_k^{*r}$  corresponding to ‘spherical’ partitions  $(T_1, \dots, T_r)$  of  $[k + 1]$  into  $r$  sets such that  $k + 1 \in T_r$  is PL homeomorphic to  $\operatorname{Con} S^{k-1} \cong D^k$ .

The above proof of Theorem 7.3.2.a for a prime  $r$  gives *many* ‘Tverberg partitions’ [Ma03, §6.5], and also the following refinements (d,e) (which are non-trivial even for  $d = 2$ ; part (c) also refines Theorems 2.1.4 and 7.1.3; for  $d = 2$  part (e) is equivalent to the ‘spherical’ refinement of Theorem 2.3.1).

(d) For any prime  $r$  any  $(d + 1)(r - 1) + 1$  points in  $\mathbb{R}^d$  can be spherically partitioned into  $r$  sets whose convex hulls have a common point.

(e) For any prime  $r$  and map  $\Delta_{(d+1)(r-1)} \rightarrow \mathbb{R}^d$  there are  $r$  pairwise disjoint faces of  $\Delta_{(d+1)(r-1)}$  whose images have a common point and which decompose vertices of  $\Delta_{(d+1)(r-1)}$  into a spherical partition.

(f) An ordered partition  $(R_1, \dots, R_r)$  of  $[3r - 2] = R_1 \sqcup \dots \sqcup R_r$  into  $r$  sets (possibly empty) is called *rainbow* if for every  $j = 1, \dots, r$  the set  $R_j$  intersects each of the three sets  $\{1, \dots, r - 1\}, \{r, \dots, 2r - 2\}, \{2r - 1, \dots, 3r - 3\}$  by at most one element. Parts (b,c)



are true for ‘spherical’ replaced by ‘rainbow’ [BMZ15, Theorem 2.2], [MTW10, Theorem 2]. Observe that ‘spherical’ is the same as ‘rainbow’ for  $r = 3$  but is different for  $r > 3$ . So the above proof of Theorem 7.3.2.a for  $r$  a prime is different from [BMZ15, MTW10] not only in exposition: these proofs give different improvements.

**Задача 8.4.4** (cf. [MTW10, Lemma 8]). (a) For every  $j \in [6]$  and ‘spherical’ partition  $G$  of  $[6] - \{j\}$  there are exactly two spherical partitions of  $[6]$  extending  $G$ .

E.g. the spherical partition  $(\{1\}, \{2, 4, 5\}, \{3\})$  of  $[5]$  extends to two spherical partitions  $(\{1, 6\}, \{2, 4, 5\}, \{3, 6\})$  and  $(\{1\}, \{2, 4, 5\}, \{3, 6\})$  of  $[6]$ . The extension  $(\{1\}, \{2, 4, 5, 6\}, \{3\})$  is not spherical because  $\{2, 4, 5, 6\} \supset \{5, 6\}$ .

Indeed, the number  $j$  can be added to two among three sets in the partition  $G$  because exactly one of the sets contains the ‘twin’  $j \pm 1$  of  $j$  which cannot appear together with  $j$ .

(b) The set of all spherical partitions of  $[6]$  admits a chessboard coloring, i.e. a coloring in two colors such that for every  $j \in [6]$  and spherical partition  $G$  of  $[6] - \{j\}$  the two spherical partitions of  $[6]$  extending  $G$  have different colors.

(c) A 5-simplex of  $\Delta_5 * \Delta_5 * \Delta_5$  corresponding to a partition  $R$  of  $[6]$  contains a 4-simplex of  $\Delta_5 * \Delta_5 * \Delta_5$  corresponding to a partition  $G$  of  $[6] - \{j\}$  if and only if  $R$  extends  $G$ .

(d) Take the 5-simplex of  $\Delta_5 * \Delta_5 * \Delta_5$  corresponding to a spherical partition  $(R_1, R_2, R_3)$  of  $[6]$ . If  $j \in R_i$ , then denote by  $j_i$  the corresponding vertex of the 5-simplex. Orient the 5-simplex as  $(1_{i_1}, 2_{i_2}, \dots, 6_{i_6})$ , where  $j \in R_{i_j}$ . Then such orientations of two 5-simplices having a common 4-simplex disagree along this 4-simplex.

(e) Assume that a triangulation of an  $n$ -manifold and a collection of orientations on  $n$ -faces is given, so that these orientations disagree along every  $(n - 1)$ -face. Assume further that the faces admit a chessboard coloring. Then the manifold is orientable.

**Замечание 8.4.5.** (a) Proofs of the Borsuk-Ulam Theorem and its  $r$ -fold generalization use the notion of *degree* analogous to the notion of the Radon and van Kampen numbers (§1, §2). So the idea of the above deduction of Theorem 7.3.2.a is not essentially different from the idea of ‘Tverberg number’ [Sk18, §2.3]. However, the above language is more traditional and more convenient.

(b) Имеется нульгомотопное  $\mathbb{Z}_6$ -эquivариантное отображение  $S^3 \rightarrow S^3$ . Действительно, возьмем

- антиподальное действие факторгруппы  $\mathbb{Z}_2$  группы  $\mathbb{Z}_6$  на  $S^1$ ;
- действие «поворот на  $2\pi/3$ » факторгруппы  $\mathbb{Z}_3$  группы  $\mathbb{Z}_6$  на  $S^1$ .

Возьмем джойн этих действий  $S^3 = S^1 * S^1$ . Действие на  $S^3$  получается не свободное (но эффективное).

(c) An alternative proof of Theorem 8.4.2 is by proving the following equivalent result.

*Extend  $\omega$  to  $S^n * \mathbb{Z}_r$  by  $\omega(ts \oplus (1 - t)m) := t\omega(s) \oplus (1 - t)(m + 1)$ . Let  $\omega_0 : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  be a map whose only fixed point is 0 and such that  $\omega_0^r = \text{id } \mathbb{R}^{n+1}$ . Then for any map  $g : S^n * \mathbb{Z}_r \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  commuting with  $\omega, \omega_0$  (i.e. such that  $g \circ \omega = \omega_0 \circ g$ ) there is  $x \in S^n * \mathbb{Z}_r$  such that  $g(x) = 0$ .*

This result is deduced from its ‘quantitative version’ analogous to [Sk18, Lemma 2.3.9], [Ma03, S2.2].

## 8.5 Почти $r$ -вложения комплексов

**Задача 8.5.1** (obstructions to  $\mathbb{Z}_2$ -almost 3-embeddability). Let  $f : K \rightarrow \mathbb{R}^3$  a general position map of a 2-complex. Define the *modulo 2 triple intersection cocycle*

$$\nu_{3,f} : K^3/\Sigma_3 \rightarrow \mathbb{Z}_2 \quad \text{by} \quad \nu_{3,f}\{\sigma, \tau, \eta\} := |f\sigma \cap f\tau \cap f\eta|_2.$$

(a,b,c) State and prove the analogues for  $v_3$  of Assertions 6.8.4, 6.8.6 and 6.8.7.

The analogue (a) gives полноту построенного препятствия. The cohomology class  $v_3(K) \in H^6(K^3/\Sigma_3; \mathbb{Z}_2)$  of the cocycle  $\nu_{3,f}$  is called *препятствие ван Кампена* к наличию отображения  $K \rightarrow \mathbb{R}^3$  общего положения, образы при котором любых трех попарно непересекающихся 2-симплексов пересекаются в четном числе точек (т.е.  $\mathbb{Z}_2$ -почти 3-вложения  $K \rightarrow \mathbb{R}^3$ ).

**Задача 8.5.2.** (a) Given orientations on  $\Delta^2$  and on  $\mathbb{R}^3$ , define the algebraic triple intersection  $f \cdot g \cdot h$  of general position maps  $f, g, h : \Delta^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  analogously to the definition before Problem 4.10.7.

(b) How does  $f \cdot g \cdot h$  change under permutations of  $f, g, h$ ?

(c,d) State and prove analogues of Assertions 6.9.1.bc for triple intersection  $f \cdot g \cdot h$  of general position maps  $f, g, h : \Delta^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ .

**Задача 8.5.3** (obstructions to almost 3-embeddability). Let  $f : K \rightarrow \mathbb{R}^3$  a general position map of a 2-complex. Analogously to Problems 8.5.1 and 8.5.2 define the (*integer*) *triple intersection cocycle*  $N_{3,f} : K^3 \rightarrow \mathbb{Z}$  and the obstruction  $V_3(K) \in H_{S_3}^6(K^3; \mathbb{Z}_T)$  to almost 3-embeddability.

(a,b,c) State and prove analogues of Assertions 6.9.4 and 6.9.5.a,b for  $N_{3,f}$ .

(d)\* (Analogue of Assertion 6.9.5.c) The cocycle  $6N_{3,f}$  is null-cohomologous for any  $K, f$ .

**Замечание 8.5.4.** (a) For a  $k(r-1)$ -complex  $K$  and a general position map  $f : K \rightarrow \mathbb{R}^{kr}$  one defines the (*integer*) *r-tuple intersection cocycle*  $N_{r,f} : K^r \rightarrow \mathbb{Z}$  analogously to the previous problems [AMS+, Proposition 1.7]. The analogues for  $N_{r,f}$  of Assertions 8.5.3.abc are true. See Theorem 6.5.1 and Proposition 7.3.4.

(b) The analogue of Assertion 8.5.3.d states that *the cocycle  $\frac{r!}{p^{\alpha_{p,r}}} N_{r,f}$  is null-cohomologous for any  $K, f, r$  and prime  $p$ . Here  $\alpha_{p,r}$  is the order of  $p$  in  $r!$ . Hence if  $r$  is not a prime power, then the cocycle  $N_{r,f}$  is null-cohomologous for any  $K, f$ .*

**Задача 8.5.5** (cf. Remark 5.4.3 and [AK21, §3]). \* Let  $K$  be a 2-complex and  $f : K \rightarrow \mathbb{R}^4$  a  $\mathbb{Z}_2$ -embedding (then  $v_2(K) = 0$ ). Take disjoint 2-faces  $\sigma, \tau$  of  $K$ . Split points in  $f\sigma \cap f\tau$  into pairs. Take pairwise disjoint Whitney arcs and pairwise disjoint Whitney disks corresponding to such pairs. Denote by

- $l_{\sigma\tau} \subset \text{Int } \sigma$  the union of those Whitney arcs,
- $W_{\sigma\tau} \subset \mathbb{R}^4$  the union of those Whitney disks,
- $W = \{W_{\sigma\tau}\}$  the collection of such unions.

Define the map (the cocycle)

$$\omega_{3,f,W} : K^3/\Sigma_3 \rightarrow \mathbb{Z}_2 \quad \text{by} \quad \omega_{3,f,W}\{\sigma, \tau, \eta\} := |W_{\sigma\tau} \cap f\eta|_2 + |W_{\tau\eta} \cap f\sigma|_2 + |W_{\eta\sigma} \cap f\tau|_2.$$

(a) For any disjoint 2-faces  $\sigma, \tau$ , edge  $e$  not contained in  $\sigma \cup \tau$ , and collection  $W$  there is a pair  $f', W'$  such that  $\omega_{3,f',W'} = \omega_{3,f,W} + \delta(e, \sigma, \tau)$  (this is an analogue of Assertion 6.8.4).

Hint. See [AK21, Figure 8]. Change  $f\sigma$  by a finger move to  $f\tau$ , i.e., by embedded connected sum with a small 2-sphere intersecting  $f\tau$  at two points. Take the Whitney disk for the two additional intersection points of the images of  $\sigma$  and  $\tau$ . Change it by a finger move to  $fe$ , i.e., by embedded connected sum with a small 2-sphere ‘linking’  $fe$  in  $\mathbb{R}^4$ .

(b) If  $\omega_{3,f,W}$  is null-cohomologous, then there is a pair  $f', W'$  such that  $\omega_{3,f',W'} = 0$ .

(c) The map  $\omega_{3,f,W}$  may depend on  $W$ , not only of  $f$ .

(d) Is it correct that for any  $W$  and  $W'$  the maps  $\omega_{3,f,W'}$  and  $\omega_{3,f,W}$  are cohomologous?

(f) Define  $w_{3,f} \in H^6(K^3/\Sigma_3; \mathbb{Z}_2)$  to be the cohomology class of  $\omega_{3,f,W}$ . (The analogue of this class is an obstruction to ‘modifying  $f$  to an almost embedding using the collection  $W$ ’.)

There are

- an obstruction  $d(f, g) \in H^3(K^2/\Sigma_2; \mathbb{Z}_2)$  for  $\mathbb{Z}_2$ -embeddings  $f, g : K \rightarrow \mathbb{R}^4$  to be homotopic through  $\mathbb{Z}_2$ -embeddings, and
- a homomorphism (an operation)  $M : H^3(K^2/\Sigma_2; \mathbb{Z}_2) \rightarrow H^6(K^3/\Sigma_3; \mathbb{Z}_2)$  such that  $w_{3,f} - w_{3,g} = Md(f, g)$ .

(g) How  $w_{3,f}$  is related to the mod 2 version of the obstruction  $o_3(K)$  from [Kr00]?

(h; remark) Let  $K$  be a 2-complex and  $f : K \rightarrow \mathbb{R}^4$  a  $\mathbb{Z}$ -embedding (then  $V_2(K) = 0$ ). Take disjoint 2-simplices  $\sigma, \tau$  of  $K$ . Split points in  $f\sigma \cap f\tau$  into pairs having opposite signs. Take oriented Whitney disks corresponding to such pairs. Denote by  $W_{\sigma\tau}$  the disjoint union of the Whitney disks for pairs in  $f\sigma \cap f\tau$ . (The boundary of the regular neighborhood of  $W_{\sigma\tau}$  intersects  $f\sigma$ ,  $f\tau$  and  $f\eta$  by three collections of circles, all of them pairwise disjoint.) Define the cocycle

$$\Omega_{3,f,W} : K^3 \rightarrow \mathbb{Z} \quad \text{by} \quad \Omega_{3,f,W}(\sigma, \tau, \eta) := W_{\sigma\tau} \cdot f\eta + W_{\tau\eta} \cdot f\sigma + W_{\eta\sigma} \cdot f\tau.$$

This cocycle is indeed  $\Sigma_3$ -symmetric. Define  $V_{3,f} \in H_{\Sigma_3}^6(K^3, \mathbb{Z}_T)$  to be the cohomology class of  $\Omega_{3,f,W}$ .

Assertion 6.9.5.d suggests the following questions. Does  $V_{3,f}$  has finite order? In particular, is it correct that  $6V_{3,f} = 0$ ?

## 8.6 Конфигурационные пространства и планарность компактов

*Компактом* называется замкнутое ограниченное подмножество в  $\mathbb{R}^d$ . Это понятие обобщает понятие (гипер)графа. Компакты естественно появляются при изучении динамических систем (даже гладких!).

Знаменитой нерешенной проблемой является проблема описания *связных компактов*, вложимых в плоскость.

Компакт называется *одномерным*, если у него существуют покрытия сколь угодно мелкими открытыми множествами, никакие три из которых не пересекаются. Ясно, что граф является одномерным компактом.

Любой *стягиваемый граф*, т.е. дерево, планарен (из сформулированной ниже теоремы Клейтора вытекает также, что любой *стягиваемый одномерный компакт Пеано* планарен). Следующий пример показывает, что для компактов дело обстоит иначе.

**Задача 8.6.1.** (a) Существует стягиваемый одномерный непланарный компакт.

(b) Для любого  $n$  существует стягиваемый  $n$ -мерный компакт, не вложимый в  $\mathbb{R}^{2n}$  [RSS, доказательство Следствия 1.5], [RS01].

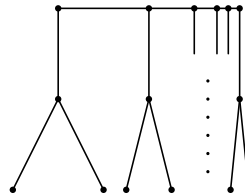


Рис. 8.6.1: Стягиваемый одномерный непланарный компакт

П. (a) является фольклорным результатом 1930-х годов. В качестве такого компакта можно взять  $N = T \times \left(0 \cup \left\{\frac{1}{k}\right\}\right) \cup x \times [0, 1]$ , где  $T$  — триод и  $x \in T$ . Ясно, что компакт  $N$  стягиваем и одномерен. Простое доказательство невложимости компакта  $N$  в плоскость [CRS98], [KS99] получается применением утверждения 8.1.1.d к  $f_0 = f_{T \times 0}$ . Приведем другое доказательство, основанное на теореме Борсука-Улама. Его преимущество в том, что оно подходит и для утверждения 8.6.1.b.

*Доказательство невозможности  $N$  в плоскость.* Предположим, что существует вложение  $f : N \rightarrow \mathbb{R}^2$ . Заметим, что существует отображение  $\varphi : S^1 \rightarrow T$ , которое не склеивает антиподы (т.е. диаметрально противоположные точки). Тогда мы можем определить отображение  $\psi : S^1 \rightarrow T \times T$  формулой  $\psi(s) = (\varphi(s), \varphi(-s))$ . Так как  $\varphi$  не склеивает антиподов, то  $\psi S^1 \cap \text{diag } T = \emptyset$ . Следовательно, можно определить отображения

$$g_0 : \psi S^1 \rightarrow S^1 \quad \text{формулой} \quad g_0(x, y) = \frac{f(x, 0) - f(y, 0)}{|f(x, 0) - f(y, 0)|} \quad \text{и}$$

$$g_k : T \times T \rightarrow S^1 \quad \text{формулой} \quad g_k(x, y) = \frac{f(x, 0) - f\left(y, \frac{1}{k}\right)}{\left|f(x, 0) - f\left(y, \frac{1}{k}\right)\right|}.$$

Отображения  $\psi$ ,  $g_0$  и  $g_k$  эквивариантны относительно инволюций на  $\psi S^1 \subset T \times T$  и  $S^1$ , переставляющих сомножители и антиподы, соответственно. Так как  $|\psi S^1, \text{diag } T| > 0$ , то для точки  $(x, y) \in \psi S^1$  и достаточно большого  $k$  точки  $g_0(x, y)$  и  $g_k(x, y)$  будут близкими. Следовательно, они не могут быть антиподами. Поэтому  $g_0$  эквивариантно гомотопно  $g_k|_{\psi S^1}$ . Но  $g_k|_{\psi S^1}$  продолжается на стягиваемое пространство  $T \times T$  и поэтому нуль-гомотопно. Следовательно,  $g_0 : \psi S^1 \rightarrow S^1$  нуль-гомотопно. Значит, отображение  $g_0 \circ \psi : S^1 \rightarrow S^1$  эквивариантно и нуль-гомотопно, что противоречит теореме Борсука-Улама. QED

Связный компакт называется *локально связным* (или континуумом Пеано), если для любой его точки  $x$  и ее окрестности  $U$  существует такая меньшая окрестность  $V$  точки  $x$ , что любые две точки из  $V$  соединяются некоторым путем, целиком лежащим в  $U$  (или, эквивалентно, если он является непрерывным образом дуги  $[0, 1]$ ). Континуумы Пеано могут быть очень сложно устроены [Ки68]. Поэтому удивительно, что имеется следующий результат.

**Теорема Клэйтора.** *Континуум Пеано вложим в  $S^2$  тогда и только тогда, когда он не содержит компактов  $K_5$ ,  $K_{3,3}$ ,  $C_{K_5}$  и  $C_{K_{3,3}}$  (рис. 8.6.2).*

Рис. 8.6.2: Континуумы Куратовского-Клэйтора (пока отсутствует)

*Построение компактов  $C_{K_5}$  и  $C_{K_{3,3}}$ .* Возьмем ребро  $ab$  графа  $K_5$  и отметим на нем новую вершину  $a'$ . Пусть  $P = K_5 - (aa')$ . Пусть  $P_n$  копия графа  $P$ . Обозначим через  $a_n$  и  $a'_n$  вершины графа  $P_n$ , соответствующие  $a$  и  $a'$ . Тогда

$$C_{K_5} = (P_1 \bigcup_{a'_1=a_2} P_2 \bigcup_{a'_2=a_3} P_3 \dots) \bigcup_{x=0} I,$$

где  $\{P_n\}$  — последовательность графов на плоскости со стремящимися к нулю диаметрами, сходящаяся к точке  $x \notin \sqcup_{n=1}^{\infty} P_n$ . Точно так же можно определить компакт  $C_{K_{3,3}}$ , взяв в начале  $K_{3,3}$  вместо  $K_5$ .

Ясно, что отсутствие подкомпактов, гомеоморфных одному из графов  $K_5$  и  $K_{3,3}$  (даже вместе с отсутствием подкомпактов, гомеоморфных компактам  $C_{K_5}$  и  $C_{K_{3,3}}$ ), недостаточно для планарности компакта (докажите!). Поэтому для изучения указанной проблемы нужны новые препятствия к вложимости в плоскость. В этом пункте мы докажем, что *препятствие взрезанного квадрата полно для континуумов Пеано и неполно для произвольных связных компактов* [Sk98].

*Доказательство аналога теоремы Хефлигера-Вебера для континуумов Пеано  $N$ .* По теореме Клэйтора достаточно доказать, что не существует эквивариантных отображений  $\widetilde{C}_{K_5} \rightarrow S^1$  и  $\widetilde{C}_{K_{3,3}} \rightarrow S^1$ . Пусть, напротив,  $\Phi : \widetilde{C}_{K_5} \rightarrow S^1$  — эквивариантное

отображение. Обозначим через  $S_n$  окружность в  $P_n$ , составленную из ребер, не содержащих вершин  $a_n$  и  $a'_n$ . Для достаточно больших  $n$  и  $m < l$  последовательно получаем гомотопическую тривиальность сужений  $\Phi$  на следующие множества:

$$x \times 1, \quad S_n \times 1, \quad S_n \times 0, \quad S_n \times S_m, \quad S_m \times S_l, \quad S_m \times a_m, \quad S_m \times a'_m.$$

(Первый переход верен, так как  $S_n$  сходится к  $x$ . Второй переход верен, так как  $\Phi|_{S_n \times I}$  является гомотопией между  $\Phi|_{S_n \times 0}$  и  $\Phi|_{S_n \times 1}$ . Третий переход верен, так как  $S_m$  сходится к  $x$ . Пятый переход верен, так как  $\Phi|_{S_m \times a_m}$  и  $\Phi|_{S_m \times a'_m}$  'гомотопны'.)

Значит,  $\Phi|_{\widetilde{P}_m}$  эквивариантно продолжается на  $\widetilde{P}_m \cup S_m \times (aa')_m \cup (aa')_m \times S_m$ . Это пространство эквивариантно гомноморфно  $\widetilde{K}_5$ , что противоречит отсутствию эквивариантных отображений  $\widetilde{K}_5 \rightarrow S^1$ .

Несуществование эквивариантного отображения  $\widetilde{C}_{K_{3,3}} \rightarrow S^1$  доказывается аналогично. (Сравните это доказательство с доказательством невложимости в теореме Клейтора [Sk05].) QED

**Пример трехадического соленоида.** Трехадический соленоид  $\Sigma_3$  не вложим в плоскость, хотя существует эквивариантное отображение  $\Phi : \widetilde{\Sigma}_3 \rightarrow S^1$  [Sk98].

Приведем построение знаменитого  $p$ -адического соленоида Виеториса-Ван Данцига, который возникает в разных отделах топологии и теории динамических систем. Он является пересечением бесконечной последовательности полноторий, каждый из которых вписан в предыдущий со степенью  $p$ . Более точно, возьмем полноторие  $T_1 \subset \mathbb{R}^3$ . Пусть  $T_2 \subset T_1$  будет полноторием, проходящим  $p$  раз вдоль оси полнотория  $T_1$ . Аналогично, пусть  $T_3 \subset T_2$  будет полноторием, проходящим  $p$  раз вдоль оси полнотория  $T_2$ . Продолжая аналогично, получаем бесконечное семейство полноторий  $T_1 \supset T_2 \supset T_3 \supset \dots$ . Пересечение всех полноторий  $T_i$  и называется  $p$ -адическим соленоидом  $\Sigma_p$ . Формально,

$$\Sigma_p = \{(x_1, x_2, \dots) \in l_2(S^1) : x_i \in S^1, x_{i+1}^p = x_i\}, \quad \text{где } S^1 = \{x \in \mathbb{C} : |x| = 1\}.$$

Это пространство рассматривается с топологией Тихонова (как и  $\widetilde{\Sigma}$  и  $U_n$  в нижеследующем доказательстве).

Заметим, что  $p$ -адический соленоид локально вложим в плоскость, но не вложим ни в какое 2-многообразие.

Построение эквивариантного отображения  $\widetilde{\Sigma}_3 \rightarrow S^1$ . Имеем

$$\widetilde{\Sigma} = \{(x_1, y_1, x_2, y_2, \dots) \mid x_i, y_i \in S^1, x_{i+1}^3 = x_i, \\ y_{i+1}^3 = y_i \text{ для каждого } i \text{ и } x_i \neq y_i \text{ для некоторого } i\}.$$

Обозначим

$$U_n = \{(x_1, y_1, x_2, y_2, \dots) \in \widetilde{\Sigma} : |x_n, y_n| > 4^{-n}\}.$$

Так как  $|x_n, y_n| \leq 3|x_{n+1}, y_{n+1}|$  для каждого  $n$ , то  $|x_n, y_n| > 4^{-n}$  для достаточно большого  $n$ . Поэтому  $U_1 \subset U_2 \subset \dots$  и  $\widetilde{\Sigma} = \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n$ . Так как  $U_n$  открыто, достаточно построить последовательность таких эквивариантных отображений  $R_n : U_n \rightarrow S^1$ , что  $R_n = R_{n+1}|_{U_n}$ .

Обозначим  $S_n = \{(x, y) \in S^1 \times S^1 : |x, y| \geq 4^{-n}\}$ . Достаточно построить последовательность таких эквивариантных отображений

$$r_n : S_n \rightarrow S^1, \quad \text{что } r_n(x^3, y^3) = r_{n+1}(x, y) \quad \text{при } (x^3, y^3) \in S_n.$$

Мы будем строить такие отображения  $r_n$  последовательно. Пусть  $r_0 : S_0 \rightarrow S^1$  — произвольное эквивариантное отображение. Предположим, что  $r_{n-1}$  уже построено. Для

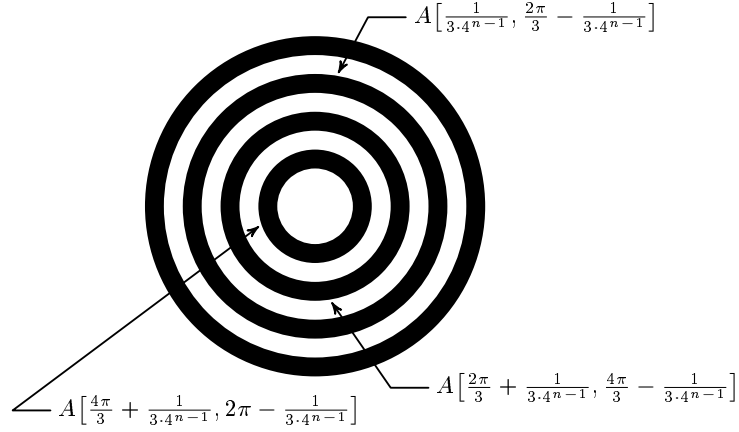


Рис. 8.6.3: Отображение  $r_n$  определено на белых кольцах и продолжается на черные. Заменить  $\frac{1}{3.4^{n-1}} \rightarrow \varepsilon$

дуги  $M \subset S^1$  с концами в  $a$  и  $b$  обозначим через  $A(M) = \{(x, y) \in S^1 \times S^1 \mid \arg \frac{x}{y} \in M\}$  кольцо с граничными циклами  $A(a)$  и  $A(b)$ . Обозначим  $\varepsilon = \frac{1}{3.4^{n-1}}$ . Используя условие  $r_n(x, y) = r_{n-1}(x^3, y^3)$ , мы можем определить отображение  $r_n$  на объединении трех колец (обозначенных белым на рис. 8.6.3)

$$A\left[\varepsilon; \frac{2\pi}{3} - \varepsilon\right] \cup A\left[\frac{2\pi}{3} + \varepsilon; \frac{4\pi}{3} - \varepsilon\right] \cup A\left[\frac{4\pi}{3} + \varepsilon; 2\pi - \varepsilon\right].$$

Так как сужения отображения  $r_{n-1}$  на окружности  $A(3\varepsilon)$  и  $A(2\pi - 3\varepsilon)$  гомотопны, то сужения отображения  $r_n$  на окружности  $A\left(\frac{2\pi}{3} - \varepsilon\right)$  и  $A\left(\frac{2\pi}{3} + \varepsilon\right)$  тоже гомотопны. Значит,  $r_n$  продолжается на  $A\left[\frac{2\pi}{3} - \varepsilon, \frac{2\pi}{3} + \varepsilon\right]$ . Следовательно,  $r_n$  эквивариантно продолжается на  $S_n$ . Мы берем в качестве  $r_n : S_n \rightarrow S^1$  любое такое продолжение. QED

**Гипотеза.** Существует древовидный компакт  $N$ , не вложимый в плоскость, но для которого есть эквивариантное отображение  $\tilde{N} \rightarrow S^1$ .

## 9 Гомотопическая классификация отображений

Гомотопическая классификация отображений  $S^n \rightarrow S^n$  [Sk20, теорема 8.3.1] получена Хайнцем Хопфом в 1926 г. Она обобщена на отображения  $n$ -комплекса в  $S^n$  Хайнцем Хопфом в 1932 г. («по заказу» Павла Сергеевича Александрова). Приводимая в §9.6 формулировка этой классификации принадлежит Хасслеру Уитни (1937 г.). Дальнейшее развитие теорема Хопфа-Уитни получила в работах Сэмюэля Эйленберга и Сондерса Маклейна (1940; §9.8), Льва Семеновича Понтрягина (1941), Нормана Стиррода (1947; §9.7), Джона Генри Константина Уайтхеда (1949) и Михаила Михайловича Постникова (1950). См. также [Sk20, §14].

Далее через  $K, L$  обозначены произвольные комплексы (или их тела; см. определение в п. 6.4). Обозначим через  $[K, L]$  множество непрерывных (или, эквивалентно, PL) отображений  $K \rightarrow L$  с точностью до гомотопности. Под «описанием» множества  $[K, L]$  мы понимаем «алгоритмическое» построение «естественной» биекции между ним и некоторым «известным» множеством. Это примерно то же, что доказательство следующего утверждения.

**Утверждение  $A(K, L)$ .** Существует алгоритм распознавания гомотопности заданных симплициальных отображений  $K \rightarrow L$ .

Стандартные обозначения  $S^n, D^n, \mathbb{R}P^n, \mathbb{C}P^n$  определены, например, в [Sk20, §3.1, начало §8, замечание 8.4.3а, §8.7]. Все отображения считаются непрерывными и прилагательное «непрерывное» опускается.

### 9.1 Отображения графа в окружность

Описание множества  $[K, S^1]$  (т.е. доказательство утверждения  $A(K, S^1)$ ) для графа  $K$  приведено в [Sk20, задача 3.10.3] при помощи стягивания ребер. Здесь мы приведем описание на другом языке, следуя общему методу теории препятствий. Хотя приведенные формулировка и доказательство более сложны, с помощью их обобщения можно получить результаты, которые не получаются при помощи многомерного аналога стягивания ребер (см. п. 9.4 и далее).

**Теорема 9.1.1** (Хопф-Уитни для графов). *Для любого графа  $K$  существует биекция  $\deg : [K, S^1] \rightarrow H^1(K; \mathbb{Z})$ .*

Группа  $H^1(K; \mathbb{Z})$  и биекция  $\deg$  определены позже. Они естественно возникают и строго определяются в процессе *продумывания* классификации, к которому мы сейчас перейдем. Степень  $\deg f$  отображения  $f : K \rightarrow S^1$  будет определена как препятствие к гомотопности отображения  $f$  постоянному отображению.

Аналогичные замечания по поводу следующих теорем пропускаются.

*Начало доказательства теоремы 9.1.1: определение препятствующей расстановки.* Знакомство с этим доказательством рекомендуем начать с примера  $K = K_4$ .

Выберем произвольно направление на каждом ребре графа  $K$  (препятствие  $\deg f$  будет зависеть от этого выбора).

Произвольное отображение  $K \rightarrow S^1$  гомотопн **клеточному**, т.е. такому, при котором все вершины графа  $K$  переходят в точку  $1 \in S^1 \subset \mathbb{C}$  (докажите!). Поэтому достаточно классифицировать клеточные отображения  $K \rightarrow S^1$  с точностью до гомотопии, отображения которой не обязательно клеточны.

Возьмем клеточное отображение  $f : K \rightarrow S^1$ . Поставим на каждом ребре число оборотов вектора  $f(x)$  при проходе точкой  $x$  по этому ребру вдоль его направления. Полученную расстановку целых чисел на ориентированных ребрах графа  $K$  обозначим  $\gamma(f)$  и назовем **препятствующей**. (Научное название — препятствующий коцикл.)

Если  $f, g : K \rightarrow S^1$  — клеточные отображения, для которых  $\gamma(f) = \gamma(g)$ , то  $f \simeq g$ .

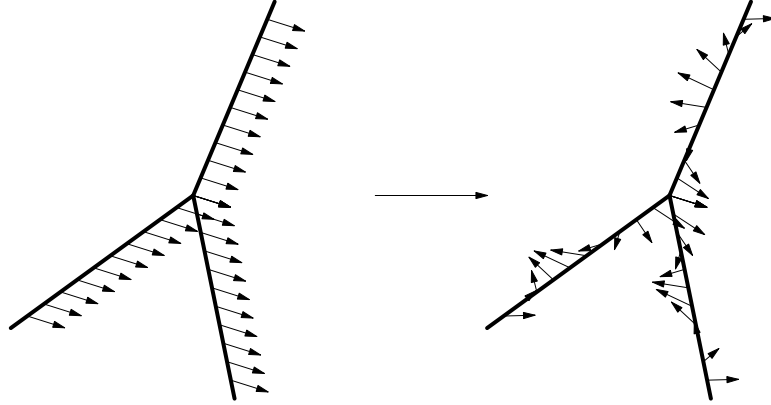


Рис. 9.1.1: Подкручивание отображения в окрестности вершины

*Изменение препятствующей расстановки.* Существуют клеточные отображения  $f_0, f_1 : K \rightarrow S^1$ , для которых  $f_0 \simeq f_1$ , но  $\gamma(f_0) \neq \gamma(f_1)$ . Приведем пример соответствующей гомотопии  $f_t$  (рис. 9.1.1). Возьмем любое клеточное отображение  $f_0 : K \rightarrow S^1$  (например, отображение в точку). Для вершины  $a$  графа  $K$  построим гомотопию  $f_t$  так, чтобы

- точка  $f_t(a)$  сделала один оборот против часовой стрелки при пробегании параметром  $t$  отрезка  $[0, 1]$ ,
- точки  $f_t(x)$  для  $x$  из маленькой окрестности  $U$  вершины  $a$  «потянулись» за точкой  $f_t(a)$ , а
- вне окрестности  $U$  отображение осталось прежним, т.е.  $f_t = f_0$  вне  $U$ .

Получим отображение  $f_1 : K \rightarrow S^1$ , гомотопное отображению  $f_0$ . Понятно, что  $\gamma(f_0)$  и  $\gamma(f_1)$  отличаются на расстановку плюс или минус единиц (в зависимости от ориентации) на ребрах, содержащих вершину  $a$ , и нулей на всех остальных ребрах. Эта расстановка называется **элементарной кограницей** вершины  $a$  и обозначается  $\delta a$ .

Обозначим через  $a_1, \dots, a_V$  все вершины графа  $K$ . В окрестностях каждой из вершин сделаем описанную выше гомотопию отображения  $f$ , поворачивая образы этих вершин на  $n_1, \dots, n_V$  оборотов, соответственно. Обозначим полученное отображение через  $f_{n_1 a_1 + \dots + n_V a_V}$ . Расстановки целых чисел на ребрах можно складывать: для этого просто складываются числа, стоящие на каждом ребре (такое сложение называется *покомпонентным*). Тогда (ср. [Sk20, §4.9])

$$(*) \quad \gamma(f) - \gamma(f_{n_1 a_1 + \dots + n_V a_V}) = n_1 \delta a_1 + \dots + n_V \delta a_V.$$

Теперь рассмотрим гомотопию  $f_t : K \rightarrow S^1$  между клеточными отображениями  $f_0, f_1$ . Для каждой вершины  $a_j$  обозначим через  $n_j$  число оборотов точки  $f_t(a_j)$  при изменении  $t$  от 0 до 1. Тогда (ср. [Sk20, §4.9])

$$(**) \quad \gamma(f_1) - \gamma(f_0) = n_1 \delta a_1 + \dots + n_V \delta a_V.$$

*Определение одномерной группы когомологий  $H^1(K; \mathbb{Z})$ , отображения  $\text{deg}$  и доказательство его биективности.* Назовем расстановки  $\gamma_1, \gamma_2$  целых чисел на ориентированных ребрах графа  $K$  **когомологичными**, если  $\gamma_1 - \gamma_2 = n_1 \delta a_1 + \dots + n_V \delta a_V$  для некоторых целых чисел  $n_1, \dots, n_V$ . Группа  $H^1(K; \mathbb{Z})$  расстановок с точностью до когомологичности называется **одномерной группой когомологий** графа  $K$  (с коэффициентами в  $\mathbb{Z}$ ). Обозначим

$$\text{deg } f = [\gamma(f)] \in H^1(K; \mathbb{Z})$$



Ввиду равенства (\*\*) это определение корректно.

Чтобы доказать сюръективность отображения  $\text{deg}$ , возьмем произвольную расстановку  $\gamma$  целых чисел на ребрах. Положим  $f(a) = 1$  для каждой вершины  $a$  графа  $K$ . Для каждого ребра  $e$  в качестве  $f|_e$  возьмем  $\gamma_e$ -кратный обход вдоль окружности  $S^1$ . Для построенного клеточного отображения  $f$  имеем  $\gamma(f) = \gamma$ , поэтому  $\text{deg } f = [\gamma]$ .

Если  $\text{deg } f = \text{deg } g$  для некоторых клеточных отображений  $f$  и  $g$ , то  $\gamma(f) - \gamma(g) = n_1 \delta a_1 + \dots + n_V \delta a_V$  для некоторых целых чисел  $n_1, \dots, n_V$ . Тогда ввиду равенства (\*\*\*) имеем  $f \simeq f_{n_1 a_1 + \dots + n_V a_V} \simeq g$ . Поэтому отображение  $\text{deg}$  инъективно. QED

**Задача 9.1.2.** (а) Одномерные группы когомологий, полученные для разных наборов ориентаций ребер, изоморфны.

(б) Одномерные группы когомологий гомеоморфных графов изоморфны.

(с) (ср. [?, утверждение 1.3.5.a]) Имеем  $H^1(K; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^{E-V+C}$ , где  $E, V$  и  $C$  — количества ребер, вершин и компонент связности графа  $K$ .

**Задача 9.1.3.** Для отображений  $f, g : K \rightarrow S^1 \subset \mathbb{C}$  графа  $K$  определим отображений  $fg : K \rightarrow S^1$  формулой  $(fg)(x) := f(x)g(x)$ .

(а) Постройте соответствующую структуру группы на  $[K, S^1]$ .

(б) Отображение  $\text{deg} : [K, S^1] \rightarrow H^1(K; \mathbb{Z})$  является изоморфизмом групп.

## 9.2 Отображения графа в проективную плоскость

**Задача 9.2.1.** (а) Найдите  $|[K, \mathbb{R}P^2]|$  для связного графа  $K$  с  $E$  ребрами и  $V$  вершинами.

(б) Докажите утверждение  $A(K, \mathbb{R}P^2)$  для графа  $K$ .

Указание: используйте стягивание ребра и  $|[S^1, \mathbb{R}P^2]| = 2$  (точнее, [Sk20, утверждение 9.2.2.a]). Для п. (б) могут оказаться полезными определения, приведенные перед утверждением 9.2.4.

Напомним, что мы пропускаем коэффициенты  $\mathbb{Z}_2$  в обозначении групп (ко)гомологий.

**Теорема 9.2.2.** Для любого графа  $K$  существует биекция  $\text{deg} : [K, \mathbb{R}P^2] \rightarrow H^1(K)$ .

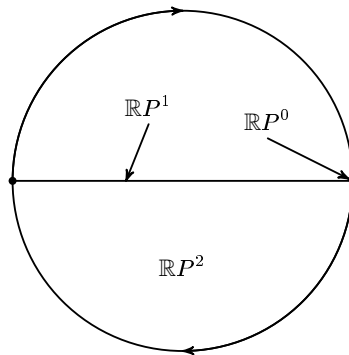


Рис. 9.2.1: Клеточное разбиение проективной плоскости

Набросок определения одномерной группы когомологий  $H^1(K)$ , отображения  $\text{deg}$  и доказательства его биективности. Фиксируем на проективной плоскости точку  $\mathbb{R}P^0$  и окружность  $\mathbb{R}P^1$ , рис. 9.2.1. Любое отображение  $f : K \rightarrow \mathbb{R}P^2$  гомотопна клеточному, т.е. переводящему любую вершину графа  $K$  в  $\mathbb{R}P^0$ , а любое ребро в  $\mathbb{R}P^1$ . Поэтому достаточно классифицировать клеточные отображения  $f : K \rightarrow \mathbb{R}P^2$  с точностью до гомотопии, отображения которой не обязательно клеточны.

Для клеточного отображения  $f : K \rightarrow \mathbb{R}P^2$  поставим на каждом ребре четность количества оборотов точки  $f(x) \in \mathbb{R}P^1$  при прохождении по этому ребру от одной вершины до другой. Эта четность не зависит от выбора направления на ребре. Полученную расстановку нулей и единиц на ребрах графа  $K$  обозначим  $\gamma(f)$  и назовем **препятствующей**.

Если  $f, g : K \rightarrow \mathbb{R}P^2$  — клеточные отображения и  $\gamma(f) = \gamma(g)$ , то  $f \simeq g$  ввиду гомотопической классификации отображений  $S^1 \rightarrow \mathbb{R}P^2$  [Sk20, утверждение 9.2.2.a].

Можно проверить, что любая гомотопия клеточного отображения  $f$  гомотопна *клеточной*, т.е. такой, в процессе которой образы вершин находятся на окружности  $\mathbb{R}P^1$ . При этом отображения, из которых состоит клеточная гомотопия, не обязательно клеточны. Для вершины  $a$  клеточной гомотопии  $f_t : K \rightarrow S^1$  между клеточными отображениями  $f_0$  и  $f_1$  рассмотрим количество оборотов точки  $f_t(a)$  при прохождении параметром  $t$  отрезка  $[0, 1]$ . Пусть  $a_1, \dots, a_s$  — все те вершины графа  $K$ , для которых это количество нечетно. Тогда

$$\gamma(f_0) - \gamma(f_1) = \delta_{a_1} + \dots + \delta_{a_s}.$$

Класс  $\deg f = [\gamma_f] \in H^1(K)$  определяется как и в теореме Хопфа-Уитни для графов 9.1.1, с заменой  $\mathbb{Z}$  на  $\mathbb{Z}_2$  (см. определения ниже). Корректность определения, инъективность и сюръективность отображения  $\deg$  доказываются аналогично той теореме. QED

**Задача 9.2.3.** Пусть на ребрах графа задана некоторая расстановка знаков  $+$  или  $-$ . Определим на графе следующую операцию: выбираем произвольную вершину и инвертируем знаки у всех ребер, которым она принадлежит.

(а) Для дерева, применяя описанную выше операцию несколько раз (к различным вершинам), мы можем из любой расстановки знаков получить любую другую.

(б) Рассмотрим связный граф с  $V$  вершинами и  $E$  ребрами. Найдите наибольшее количество таких расстановок знаков  $+$  или  $-$  на ребрах графа, что ни одна из них не может быть получена ни из какой другой описанными выше операциями.

Расстановку нулей и единиц на ребрах комплекса (в частности, графа) будем коротко называть 1-расстановкой (общепринятое название: симплициальная 1-цепь или 1-цепь). **Кограницей**  $\delta_a$  вершины  $a$  комплекса называется расстановка единиц на ребрах, выходящих из  $a$ , и нулей на остальных ребрах (или множество ребер, выходящих из  $a$ ). 1-Расстановки называются **когомологичными**, если их разность (=сумма) есть сумма некоторых кограниц вершин. **Одномерной группой когомологий**  $H^1(K)$  графа  $K$  (с коэффициентами в  $\mathbb{Z}_2$ ) называется группа 1-расстановок с точностью до когомологичности.

Для  $H^1(K)$  справедливы аналоги утверждений 9.1.2.вс, см. задачу 9.2.3.

Применения (аналогов) следующей небольшой теории приведены в §9.4, замечании 1.5.3.с и п. 1.6.

**Значением**  $\alpha(C) = \int_C \alpha = \alpha \cdot C$  1-расстановки  $\alpha$  на простом цикле  $C$  (или ее *интегралом* по  $C$ , или ее *скалярным произведением* на  $C$ ) называется сумма (по модулю 2) ее чисел на всех ребрах цикла  $C$ . Определение 1-цикла приведено, например, в [Sk20, §6], [?, предисловие]. **Значение** 1-расстановки на 1-цикле определяется аналогично.

**Задача 9.2.4.** (а) (ср. [Sk20, задача 6.7.1b]) Значение кограницы любой вершины на любом 1-цикле нулевое.

(б) (ср. [Sk20, задача 6.7.4]) 1-Расстановка является суммой кограниц некоторых вершин тогда и только тогда, когда ее значение на любом простом цикле (или, эквивалентно, на любом 1-цикле) нулевое.

Ввиду утверждения 9.2.4.а формула

$$[\alpha] \cdot C = \text{ev}[\alpha](C) := \alpha \cdot C$$

корректно определяет значение класса когомологий  $[\alpha]$  на 1-цикле  $C$ . Обозначим через  $H_1(K)$  группу 1-циклов в графе  $K$ . Получаются билинейное умножение  $\cdot : H^1(K) \times H_1(K) \rightarrow \mathbb{Z}_2$  и (что то же самое) гомоморфизм  $\text{ev} : H^1(K) \rightarrow H_1(K)^*$ .

**Задача 9.2.5.** Для графа это умножение невырождено (справа и слева). Иными словами, отображение  $\text{ev}$  является изоморфизмом.

Подсказка: ввиду утверждения 9.2.4.б.

1-Расстановка в комплексе называется **1-коциклом**, если ее значение на границе любой двумерной грани равно нулю.

**Задача 9.2.6.** (а) Кограница является коциклом.

(б) 1-Расстановка, когомологичная коциклу, тоже является коциклом.

**Одномерной группой когомологий**  $H^1(K)$  комплекса  $K$  (с коэффициентами в  $\mathbb{Z}_2$ ) называется группа 1-коциклов с точностью до когомологичности.

1-Расстановки называются **гомологичными**, если их разность есть сумма некоторых границ двумерных граней. Обозначим через  $H_1(K)$  группу 1-циклов в комплексе  $K$  с точностью до гомологичности.

**Задача 9.2.7.** (а) Билинейное умножение  $\cdot : H^1(K) \times H_1(K) \rightarrow \mathbb{Z}_2$  и гомоморфизм  $\text{ev} : H^1(K) \rightarrow H_1(K)^*$  корректно определены формулами  $[\alpha] \cdot [C] = \text{ev}[\alpha]([C]) := \alpha \cdot C$ .

(б) Это умножение невырождено (справа и слева). Иными словами, отображение  $\text{ev}$  является изоморфизмом.

Расстановку нулей и единиц на двумерных гранях комплекса будем коротко называть 2-расстановкой. Определения *2-цикла* в комплексе и *кограницы ребра* (по модулю 2) приведены, например, в [HG], [Sk20, §10.6 «общее определение групп гомологий»], п. 9.6.

**Задача 9.2.8** (ср. с утверждением 9.2.4). (а) Если в комплексе нет непустых 2-циклов, то любая 2-расстановка есть сумма кограниц некоторых ребер. (Осторожно, «висячих» двумерных граней может не быть, как в шутовском колпаке Зимана из задачи 6.1.1.а или в *доме Бинга с двумя комнатами*, [https://en.wikipedia.org/wiki/House\\_with\\_two\\_rooms](https://en.wikipedia.org/wiki/House_with_two_rooms).)

(б) 2-Расстановка является суммой кограниц некоторых ребер тогда и только тогда, когда ее значение на любом 2-цикле нулевое. (Значение 2-расстановки на 2-цикле определяется аналогично одномерному случаю.)

**Задача 9.2.9.** (а,б) Сформулируйте и докажите двумерные аналоги утверждений 9.2.7.ab.

### 9.3 Эквивариантные отображения графа

В этом пункте  $K$  — граф с инволюцией (симметрией)  $\tau : K \rightarrow K$ , не имеющей неподвижных точек. См. примеры инволюций в [Sk20, §7.1]. Ср. [MNS, §1.5].

Отображение  $f : K \rightarrow S^1$  называется *эквивариантным* (относительно  $\tau$ ), если  $f(\tau(x)) = -f(x)$  для любого  $x \in K$ . Такие отображения возникали в п. 8.2, см. также пп. 1.6 и 8.6. Обозначим через  $[K, S^1]_\tau$  множество эквивариантных отображений  $K \rightarrow S^1$  с точностью до эквивариантной гомотопии (т.е. гомотопии в классе эквивариантных отображений).

По эквивариантному отображению  $f : K \rightarrow S^1$  можно построить отображение  $f/\tau : K/\tau \rightarrow \mathbb{R}P^1 \cong S^1$ . Легко проверить, что отображение  $[K; S^1]_\tau \rightarrow [K/\tau; S^1]$  кор-

ректно определено формулой  $[f] \mapsto [f/\tau]$ . Это отображение является биекцией, что не очевидно, но следует из нижеприведенной теоремы 9.3.1.

Группа  $H^1(K/\tau; \mathbb{Z})$  определена в п. 9.1.

**Теорема 9.3.1** (эквивариантная теорема Хопфа). *Если инволюция  $\tau$  переводит каждую вершину в вершину, то определенное ниже отображение  $\text{deg} : [K; S^1]_\tau \rightarrow H^1(K/\tau; \mathbb{Z})$  является биекцией.*

Теорему 9.3.1 можно доказать, используя одновременное стягивание  $\tau$ -симметричных ребер в  $K$ . Как и в п. 9.1, приведем набросок доказательства, следующего общему методу теории препятствий.

*Набросок определения отображения  $\text{deg}$  и доказательства его биективности.* Предположим, что в графе  $K$  нет петель и кратных ребер (перенести наши построения на общий случай несложно).

Произвольное эквивариантное отображение  $K \rightarrow S^1$  эквивариантно гомотопно *клеточному*, т.е. такому, для которого каждая вершина графа  $K$  переходит в одну из точек 1 или  $-1$  (докажите!). Поэтому достаточно классифицировать клеточные эквивариантные отображения с точностью до эквивариантной гомотопии, отображения которой не обязательно клеточны.

Некоторое эквивариантное клеточное отображение  $f_0 : K \rightarrow S^1$  можно получить, задав его произвольно на вершинах, а затем продолжив на ребра.

Фиксируем ориентации на окружности  $S^1$  и на ребрах графа  $K$  так, чтобы ориентации на симметричных ребрах были согласованы. Возьмем клеточное эквивариантное отображение  $f : K \rightarrow S^1$ . Для каждого ребра рассмотрим полуцелое число оборотов вектора  $f(x)$  при пробегании  $x$  этого ребра в направлении ориентации ребра. Поставим на этом ребре разность этого числа и аналогичного числа для  $f_0$ . Получим расстановку  $\gamma(f)$  полуцелых чисел на ребрах графа  $K$ .

Тогда на паре симметричных ребер стоят равные числа. Такие расстановки называются *симметричными*.

Кроме того,

(i) сумма чисел на ребрах любого пути, соединяющего две симметричные вершины, целая;

(ii) сумма чисел на ребрах любого цикла целая.

Утверждение (i) следует из того, что  $f(a) = -f(\tau a)$  и  $f_0(a) = -f_0(\tau a)$  для любой вершины  $a$ .

Определим *симметричную кограницу*  $\delta(a, \tau a)$  пары инволютивных вершин  $a, \tau a$  так:

- на всех ребрах, не содержащих ни  $a$ , ни  $\tau a$ , ставим нули,
- на ребрах, входящих в одну из этих вершин, ставим  $+1/2$ ,
- на выходящих ставим  $-1/2$ .

Ребер, соединяющих вершины  $a$  и  $\tau a$  нет ввиду отсутствия кратных ребер и неподвижных точек.

Как и в теореме Хопфа-Уитни для графов 9.1.1 определяются

- отношение *симметричной когомологичности*,
- группа  $H_\tau^1(K; \frac{1}{2}\mathbb{Z})$  симметричных расстановок с точностью до симметричной когомологичности, и
- отображение  $\text{deg} : [K; S^1]_\tau \rightarrow H_\tau^1(K; \frac{1}{2}\mathbb{Z})$ .

Доказательства корректности определения отображения  $\text{deg}$  и его инъективности аналогичны доказательству теоремы Хопфа-Уитни для графов 9.1.1. Это отображение не сюръективно ввиду любого из утверждений (i), (ii). Подгруппа в  $H_\tau^1(K; \frac{1}{2}\mathbb{Z})$  классов расстановок, удовлетворяющих условиям (i), (ii), совпадает с подгруппой  $H_\tau^1(K; \mathbb{Z})$ ,

определяемой аналогично через расстановки *целых* чисел (проверьте!). Кроме того,  $H^1_\tau(K; \mathbb{Z}) \cong H^1(K/\tau; \mathbb{Z})$  (проверьте!). Поэтому можно считать, что область значений отображения  $\text{deg}$  есть  $H^1(K/\tau; \mathbb{Z})$ .

Докажем сюръективность (нового) отображения  $\text{deg}$ . Возьмем любую симметричную расстановку  $\gamma$  целых чисел на ребрах графа  $K$ . Для каждой вершины  $a \in K$  положим  $f(a) := f_0(a)$ . Для каждого ребра  $e$  в качестве  $f|_e$  возьмем «подкрутку отображения  $f_0|_e$  на  $\gamma_e$  оборотов». Для построенного клеточного отображения  $f$  имеем  $\gamma(f) = \gamma$ , поэтому  $\text{deg } f = [\gamma]$ . QED

## 9.4 Ретрагируемость комплекса на окружность

Подмножество  $A \subset X \subset \mathbb{R}^m$  называется **ретрактом** множества  $X$ , если существует отображение  $X \rightarrow A$ , тождественное на  $A$ .

**Задача 9.4.1.** Является ли ретрактом объемлющего пространства

- (a) краевая окружность кольца; (a') объединение краевых окружностей кольца;
- (b) краевая окружность диска; (c) параллель тора;
- (d) окружность на торе, представленная диагональю квадрата, из которого склеен тор;
- (e) параллель одного из торов в связной сумме двух торов;
- (f) краевая окружность тора с дыркой; (g)  $\mathbb{R}P^1$  в  $\mathbb{R}P^2$ ;
- (h) параллель бутылки Клейна; (i) меридиан бутылки Клейна?

Бутылка Клейна получена склейкой сторон  $\overrightarrow{AB}$  и  $\overrightarrow{CD}$  (образующих меридиан),  $\overrightarrow{BC}$  и  $\overrightarrow{AD}$  (образующих параллель) квадрата  $ABCD$ .

**Задача 9.4.2.** Является ли ретрактом ленты Мебиуса

- (a) ее срединная окружность; (b) ее краевая окружность;
- (c) отрезок  $AB$ , если лента Мебиуса получена склейкой отрезков  $\overrightarrow{AB}$  и  $\overrightarrow{CD}$  прямоугольника  $ABCD$  (т.е. отрезок, который не разбивает ленту и концы которого принадлежат ее краевой окружности)?

**Задача 9.4.3.** (a) Любая сфера с ручками и дырками (т.е. любое ориентируемое 2-многообразие), кроме сферы и диска, ретрагируется на некоторую окружность.

(b) Любое 2-многообразие, кроме сферы, диска и проективной плоскости, ретрагируется на некоторую окружность.

(c) Окружность  $S$  в сфере с ручками  $N$  является ее ретрактом тогда и только тогда, когда  $N - S$  связно. (Ср. с утверждениями 9.4.9.bc и задачей 9.4.1.g.)

(d) Любой подкомплекс, гомеоморфный отрезку, является ретрактом комплекса.

**Задача 9.4.4.** Является ли отображаемая окружность  $S^1$  ретрактом цилиндра отображения  $f : S^1 \rightarrow X$  (см. определение, например, в [Sk20e]), если

(a)  $X = S^1$  и  $f$  — трехкратная намотка (тогда цилиндр отображения получен (123)-склейкой, см. определение перед задачей 6.1.3);

(b) (пример Хопфа)  $X = S^1 \vee S^1$  и  $f$  задано словом  $a^2b^3$ .

Для разбора примера Хопфа нужны теорема Хопфа 9.4.6.a и ее переформулировка из задачи 9.4.7.

**Теорема 9.4.5.** (a) Существует алгоритм проверки ретрагируемости комплекса  $K$  на заданный подкомплекс, являющийся простым циклом (т.е. гомеоморфный окружности).

(b) Существует алгоритм, который по комплексу  $K$ , его подкомплексу  $A$  и симплициальному отображению  $f : A \rightarrow C$  в цикл  $C \cong S^1$  выясняет, продолжается ли  $f$  до отображения  $K \rightarrow C$ .

Это следует из теоремы Хопфа 9.4.6.

Следующие целочисленные версии определений, приведенных перед утверждением 9.2.4, фактически возникли в п. 9.1. *Расстановкой* называется расстановка целых чисел на ориентированных ребрах комплекса (общепринятое название: (симплициальная целочисленная 1-коцепь)). **Значением** расстановки на ориентированном простом цикле (или ее *интегралом* по этому циклу, или ее *скалярным произведением* на этот цикл) называется сумма чисел на ребрах цикла с коэффициентами  $+1$ , если направление цикла согласовано с ориентацией ребра, и  $-1$ , иначе. Расстановка называется **1-коциклом** (целочисленным одномерным коциклом), если ее значение на границе любой двумерной грани равно нулю.

**Теорема 9.4.6** (Хопф). (а) Заданный комплекс  $K$  ретрагируется на заданный подкомплекс  $C$ , являющийся простым циклом, тогда и только тогда, когда существует 1-коцикл на  $K$ , значение которого на  $C$  равно 1 (для некоторой ориентации на  $C$ ). Или, что эквивалентно, когда любая расстановка на  $C$  продолжается до 1-коцикла на  $K$ .

(б) Пусть  $A$  — подкомплекс комплекса  $K$ . Симплициальное отображение  $f : A \rightarrow C$  в цикл  $C \cong S^1$  продолжается до отображения  $K \rightarrow C$  тогда и только тогда, когда существует 1-коцикл, значение которого на любом ориентированном простом цикле  $\Gamma$  в  $A$  равно  $\deg f|_{\Gamma}$  (для некоторой ориентации на  $C$ ).

Значение коцикла в п. (а) и число  $\deg f|_{\Gamma}$  в п. (б) зависят от выбора ориентации на  $C$ , но существование нужного коцикла от этого выбора не зависит.

Указание к доказательству необходимости в теореме Хопфа 9.4.6. Расстановка определяется по ретракции или продолжению  $f : K \rightarrow C$  аналогично теореме Хопфа-Уитни для графов 9.1.1. Ее значение на цикле  $\Gamma$  равно количеству оборотов точки  $f(x)$  при обходе точкой  $x$  цикла  $\Gamma$  (т.е. степени  $\deg f|_{\Gamma}$ ). Поэтому расстановка является коциклом, и выполнено свойство о его значении. QED

Указание к доказательству достаточности в теореме Хопфа 9.4.6 (и к п. 9.5). Используйте, что

(\*) для любого  $n \geq 2$  любое отображение  $S^n \rightarrow S^1$  продолжается на  $D^{n+1}$  [Sk20, теоремы 3.11.1 и 8.1.5b];

(\*\*) для подкомплекса  $A \subset K$  комплекса  $K$  отображение  $f : A \rightarrow S^1$  продолжается на  $K$  тогда и только тогда, когда некоторое отображение, гомотопное  $f$ , продолжается на  $K$  (теорема Борсука о продолжении гомотопии, ср. [Sk20, задача 3.7.d]). QED

Для разбора примера Хопфа 9.4.4.b переформулируем теорему Хопфа 9.4.6.a на более сложный стандартный язык. (Аналогично переформулируется теорема Хопфа 9.4.6.b.)

Элементарная кограница  $\delta a$  вершины  $a$  определена в теореме Хопфа-Уитни для графов 9.1.1. Назовем расстановки  $\gamma_1, \gamma_2$  целых чисел на ориентированных ребрах комплекса  $K$  **когомологичными**, если  $\gamma_1 - \gamma_2 = n_1 \delta a_1 + \dots + n_V \delta a_V$  для некоторых целых чисел  $n_1, \dots, n_V$ . Группа  $H^1(K; \mathbb{Z})$  классов когомологичности коциклов называется **одномерной группой когомологий** комплекса  $K$  (с коэффициентами в  $\mathbb{Z}$ ).

Для подкомплекса  $A \subset K$  комплекса  $K$  и расстановки  $\gamma$  целых чисел на ориентированных ребрах обозначим через  $\gamma|_A$  сужение (ограничение) этой расстановки на ребра подкомплекса  $A$ .

**Задача 9.4.7.** (а) Соответствие  $[\gamma] \mapsto [\gamma|_A]$  корректно определяет отображение  $H^1(K; \mathbb{Z}) \rightarrow H^1(A; \mathbb{Z})$ . Оно называется *сужением*.

(б) Условие из теоремы Хопфа 9.4.6.a равносильно следующему: существует  $x \in H^1(K; \mathbb{Z})$ , сужение которого на  $C$  является образующей группы  $H^1(C; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$ .

(с) Или следующему: некоторый *двумерный препятствующий коцикл* (расстановка целых чисел на ориентированных двумерных гранях) когомологичен нулевому по модулю  $C$  (дайте необходимые определения самостоятельно).

(d) Группа  $H^1(K; \mathbb{Z})$  не меняется при сдвливании (см. определение в [Sk20, §5.9]).

(е) Для  $K$  — цилиндра отображения из примера Хопфа 9.4.4.b вычислите группу  $H^1(K; \mathbb{Z})$  и сужение  $H^1(K; \mathbb{Z}) \rightarrow H^1(S^1; \mathbb{Z})$ .

**Задача 9.4.8.** (с,d,e) Найдите  $H^1(K; \mathbb{Z})$  для тора, проективной плоскости и бутылки Клейна  $K$ . (Ср. с задачами 9.5.1.bde.)

**Задача 9.4.9.** Определение группы  $H_1(K; \mathbb{Z})$  и ее простейшие свойства приведены, например, в [Sk20, п. 10.5].

(а) Если простой цикл  $C$  в комплексе  $K$  (точнее, в его одномерном остове) является его ретрактом, то класс  $[C] \in H_1(K; \mathbb{Z})$  *примитивен*, т. е. не делится ни на одно число, отличное от  $\pm 1$ . (Класс  $[C]$  зависит от выбора ориентации на  $C$ , но его примитивность не зависит. Это гомологический аналог необходимого условия из теоремы Хопфа 9.4.6.a.)

(b) Верно ли обратное?

(с) Для замкнутого ориентируемого  $n$ -многообразия  $N$  условия из п. (а) равносильны наличию замкнутого ориентируемого  $(n-1)$ -подмногообразия в  $N$ , трансверсально пересекающего  $C$  ровно в одной точке.

(d) Замкнутое ориентируемое многообразие  $N$  ретрагируется на некоторую (PL вложенную) окружность тогда и только тогда, когда группа  $H_1(N; \mathbb{Z})$  бесконечна. (Это доказано К. Борсуком в 1931-33 даже для комплексов и пееановских континуумов, см. <https://math.stackexchange.com/questions/2678236/retraction-onto-a-circle-in-a-simp>)

*Ответы к 9.4.1:* (а,с,d,e,h) да; (b,f,g,i) нет.

*Указание к 9.4.1.* (b,f) По лемме Шпернера и аналогично ей.

(g,i) Композиция включения и ретракции есть тождественное отображение. Примените  $H_1(\cdot, \mathbb{Z})$  (или  $\pi_1(\cdot)$ ).

*Ответы к 9.4.2:* (а,с) да; (b) нет.

*Ответы к 9.4.4:* (а) нет; (b) да.

## 9.5 Отображения комплекса в окружность

**Задача 9.5.1.** (а) Постройте биекцию между множеством отображений диска с  $n$  ленточками (см. определение в [Sk20, §2]) в  $S^1$  с точностью до гомотопности и множеством  $\mathbb{Z}^n$ .

(b) Постройте биекцию  $[N, S^1] \rightarrow \mathbb{Z}^{2g}$  для сферы с  $g$  ручками  $N$ .

(с) Какие отображения  $\mathbb{R}P^1 \rightarrow S^1$  продолжаются на  $\mathbb{R}P^2$ ?

(d) Любое отображение  $\mathbb{R}P^2 \rightarrow S^1$  гомотопно отображению в точку.

*Указание.* Гомотопию в точку сужения на  $\mathbb{R}P^1$  можно продолжить на  $\mathbb{R}P^2$  ввиду свойства (\*) из §9.4.

(е) Найдите  $[K, S^1]$  для бутылки Клейна  $K$ .

(f) (Загадка) Опишите  $[N, S^1]$  для 2-многообразия  $N$ . (Сообразите сами, через какие данные 2-многообразия выразить ответ.)

**Задача 9.5.2.** (а) Любое отображение  $\mathbb{R}P^3 \rightarrow S^1$  гомотопно отображению в точку.

*Указание:*  $\mathbb{R}P^1 \subset \mathbb{R}P^2 \subset \mathbb{R}P^3$ .

(b) (Загадка) Опишите  $[S^1 \times S^2, S^1]$ .

*Указание.* Сначала опишите  $[S^1 \vee S^2, S^1]$ . Гомотопию между сужениями на  $S^1 \vee S^2$  можно продолжить на  $S^1 \times S^2$  ввиду свойства (\*) из §9.4.

(с) (Загадка) Опишите  $[(S^1)^3, S^1]$ .

*Указание:*  $S^1 \vee S^1 \vee S^1 \subset S^1 \times S^1 \times * \cup S^1 \times * \times S^1 \cup * \times S^1 \times S^1 \subset (S^1)^3$ .

Теоремы этого и следующего пунктов интересно разобрать даже для 3-многообразий и 2-комплексов.

**Теорема 9.5.3** (Брушлинский). Пусть  $K$  — комплекс.

- (a) Утверждение  $A(K, C)$  верно для любого цикла  $C \cong S^1$ .
- (b) Существует биекция  $\text{deg} : [K, S^1] \rightarrow H^1(K; \mathbb{Z})$ .

*Определение отображения deg.* Так же, как и в теореме Хопфа-Уитни для графов 9.1.1 определяется клеточность отображения  $K \rightarrow S^1$  и, для клеточного отображения  $f : K \rightarrow S^1$ , препятствующая расстановка  $\gamma(f)$  целых чисел на ориентированных ребрах. По теореме продолжаемости [Sk20, §3.10] расстановка  $\gamma(f)$  является коциклом. Определим  $\text{deg } f = [\gamma(f)] \in H^1(K; \mathbb{Z})$ .

*Докажем инъективность отображения deg.* Сначала соединим отображения одинаковой степени гомотопией на объединении  $K^{(1)}$  ребер (аналогично доказательству теоремы Хопфа-Уитни для графов 9.1.1). Эту гомотопию можно продолжить на  $K$ , последовательно продолжая на грани, ввиду свойства (\*) из §9.4.

*Докажем сюръективность отображения deg.* Для коцикла  $\gamma$  построим такое непрерывное отображение  $f : K^{(1)} \rightarrow S^1$ , что  $\gamma(f) = \gamma$  (аналогично доказательству теоремы Хопфа-Уитни для графов 9.1.1). Так как  $\gamma$  коцикл, то по теореме продолжаемости [Sk20, §3.10] продолжаем отображение  $f$  на каждую двумерную грань. Используя свойство (\*) из §9.4, продолжаем продолжение на  $K$ .

**Теорема 9.5.4.** Для любого ориентируемого (гладкого или PL)  $n$ -многообразия  $N$  существует биекция  $\text{deg} : [N, S^1] \rightarrow H_{n-1}(N, \partial; \mathbb{Z})$ .

Определения группы  $H_{n-1}(N, \partial; \mathbb{Z})$  и биекции  $\text{deg}$  естественно возникают в процессе придумывания этой классификации. Сравните с определением в [Sk20, §9.4, §10.6]. Доказательство проводится при помощи конструкции Понтрягина, см., например, [Sk20, §8.8], [Pr04, §18.5]. Указания к другому доказательству приведены в [Sk20, задача 14.9.2.abc].

**Задача 9.5.5.** Для любого ориентируемого  $n$ -многообразия  $N$  существует изоморфизм (Пуанкаре)  $H^1(N; \mathbb{Z}) \rightarrow H_{n-1}(N, \partial; \mathbb{Z})$ . (Не путайте это тривиальное следствие наличия двойственного разбиения с нетривиальной двойственностью Пуанкаре [Sk20, §9.4, §10.6].)

## 9.6 Отображения комплекса в сферу той же размерности

Здесь мы обобщим описание множеств  $[S^k, S^n]$  для  $k \leq n$  и  $[N, S^n]$  для  $n$ -многообразия  $N$  [Sk20, §8.1, §8.3].

**Теорема 9.6.1** (Хопф-Уитни). Для любого  $n$ -комплекса  $K$

- (a) утверждение  $A(K, S^n)$  верно;
- (b) существует биекция  $\text{deg} : [K, S^n] \rightarrow H^n(K; \mathbb{Z})$ .

*Начало доказательства: определение препятствующей расстановки.* Аналогично теореме Хопфа-Уитни для графов 9.1.1.

Выберем произвольно ориентацию на каждой  $n$ -мерной грани комплекса  $K$  (препятствие  $\text{deg } f$  будет зависеть от этого выбора).

Ввиду свойств  $[S^k, S^n] = 0$  для  $k < n$  («общего положения») [Sk20, §8.1] любое отображение  $f : K \rightarrow S^n$  гомотопнo клеточному, т.е. переводящему объединение  $(n-1)$ -мерных граней в  $(1, 0, \dots, 0) \in S^n$ . Поэтому достаточно классифицировать клеточные отображения с точностью до гомотопии, отображения которой не обязательно клеточны.



Для клеточного отображения  $f : K \rightarrow S^n$  рассмотрим произвольную  $n$ -мерную грань  $c \subset K$ . Образ ее границы  $\partial c$  есть точка. Поэтому отображение  $f|_c$  есть композиция гомеоморфизма  $c \rightarrow D^n$ , определенного ориентацией грани  $c$ , схлопывания  $D^n \rightarrow S^n$  границы  $S^{n-1}$  в точку и некоторого отображения  $S^n \rightarrow S^n$ . Поставим на грани  $c$  степень последнего отображения. Полученную расстановку обозначим  $\gamma(f)$  и назовем **препятствующей**.

Если  $f_0, f_1 : K \rightarrow S^n$  — клеточные отображения, для которых  $\gamma(f) = \gamma(g)$ , то  $f \simeq g$ .

*Набросок определений  $n$ -мерной группы когомологий  $H^n(K; \mathbb{Z})$ , отображения  $\deg$  и доказательства его биективности.* **Кограница** ориентированной  $(n-1)$ -мерной грани, **когомологичность** расстановок,  **$n$ -мерная группа  $H^n(K; \mathbb{Z})$  когомологий** с коэффициентами в  $\mathbb{Z}$  (комплекса  $K$  с ориентированными  $n$ -мерными гранями) и отображение  $\deg$  определяются аналогично теореме Хопфа-Уитни для графов 9.1.1 (см. детали ниже).

Корректность определения отображения  $\deg$ , его сюръективность и инъективность доказываются аналогично теореме Хопфа-Уитни для графов 9.1.1. Для доказательства корректности необходимо следующее добавление: ввиду свойств  $[S^k, S^n] = 0$  для  $k < n$  («общего положения») [Sk20, §8.1] можно считать, что гомотопия между  $f, g : K \rightarrow S^n$  отображает объединение  $(n-2)$ -граней комплекса  $K$  в  $(1, 0, \dots, 0) \in S^n$ . QED

Далее в этом пункте  $K$  — комплекс произвольной размерности с набором ориентаций на  $n$ -мерных гранях.

Для любого клеточного отображения  $f : K \rightarrow S^n$  **препятствующая расстановка**  $\gamma(f)$  определяется так же, как в теореме Хопфа-Уитни 9.6.1. Из критерия продолжаемости на  $D^{n+1}$  отображения  $S^n \rightarrow S^n$  следует, что для препятствующей расстановки *сумма чисел на границе любой  $(n+1)$ -мерной грани равна 0*.

Расстановки с этим условием называются **коциклами**. **Кограница** ориентированной  $(n-1)$ -мерной грани, **когомологичность** коциклов,  **$n$ -мерная группа  $H^n(K; \mathbb{Z})$  когомологий** (с коэффициентами в  $\mathbb{Z}$  комплекса  $K$ ) и отображение  $\deg : [K, S^n] \rightarrow H^n(K; \mathbb{Z})$  определяются аналогично теореме Хопфа-Уитни для графов 9.1.1.

Приведем явно эти определения (ср. с определением групп гомологий в [Sk20, §10.6]). Обозначим через  $C^n = C^n(K; \mathbb{Z})$  группу расстановок целых чисел на ориентированных  $n$ -мерных гранях (с операцией покомпонентного сложения). Для  $n$ -мерной грани  $\sigma$  определим ее **элементарную кограницу**  $\delta\sigma \in C^{n+1}$  как расстановку плюс или минус единиц на  $(n+1)$ -мерных гранях, содержащих  $\sigma$ , и нулей на остальных  $(n+1)$ -гранях; уточните знаки, исходя из предыдущих примеров, мотивирующих это определение. Элементарные кограницы определяют линейное **кограничное** отображение  $\delta_{n+1} : C^n \rightarrow C^{n+1}$ .

**Задача 9.6.2.**  $\delta_{n+1} \circ \delta_n = 0$ .

Положим

$$H^n(X; \mathbb{Z}) := \delta_{n+1}^{-1}(0) / \delta_n(C^{n-1}) \quad \text{для } n \geq 1 \quad \text{и} \quad H^0(X; \mathbb{Z}) := \delta_1^{-1}(0).$$

Отображение  $\deg$  определяется формулой  $\deg[f] = [\gamma(f)]$ .

**Задача 9.6.3.** (а) Отображение  $\deg$  корректно определено.

(б) Если  $\dim K = n+1$ , то  $\deg$  сюръективно.

Поскольку существует отображение  $S^3 \rightarrow S^2$ , не гомотопное отображению в точку [Sk20, §8.7], то отображение  $\deg$  не инъективно для  $\dim K = n+1 = 3$ .

**Задача 9.6.4.** Пусть  $A$  — подкомплекс комплекса  $K$  и  $\dim(K - A) \leq n+1$ . Тогда существует алгоритм проверки продолжаемости на  $K$  заданного симплициального отображения  $A \rightarrow S^n$ .

*Указание.* Аналогично вышеприведенному определите группу  $H^{n+1}(K, A; \mathbb{Z})$  и постройте препятствие  $o(f) \in H^{n+1}(K, A; \mathbb{Z})$  к продолжению  $f$  на  $K$ .

Условие  $\dim(K-A) \leq n+1$  можно ослабить до  $\dim(K-A) \leq 2n-1$ , с использованием гораздо более продвинутых методов (см. §9.7, §9.8).

**Теорема 9.6.5** ([СКМ12+, Theorem 1.4]). *For any  $n > 1$  there is an algorithm that, given simplicial complexes  $A \subset K$  and  $Y$ , and a simplicial map  $f : A \rightarrow Y$ , where  $Y$  is  $(n-1)$ -connected and  $\dim(K-A) \leq 2n-1$ , decides whether  $f$  extends to a map  $X \rightarrow Y$ . Moreover, the algorithm runs in polynomial time in  $A, K, Y$  for  $n$  fixed.*

Однако при  $\dim(K-A) = 2n$  такого алгоритма может не быть. Это показывает следующая версия теоремы [СКМ+, Theorem 1.1], несложно вытекающей из результатов Хопфа-Уайтхеда о гомотопической классификации отображений  $S^{2n-1} \rightarrow S^n$  и  $S^{2n-1} \rightarrow S^n \vee S^n$ , см. обзор [Sk20e].

**Теорема 9.6.6.** *Let  $Y_n = S^n$  for  $n$  even and  $Y_n = S^n \vee S^n$  for  $n$  odd. For any  $n > 1$  there is no algorithm recognizing extendability of the identity map of  $Y_n$  to a map  $K \rightarrow Y_n$  of a given  $2n$ -complex  $K$  containing a subdivision of  $Y_n$  as a given subcomplex. (I.e., retractability of  $K$  to  $Y_n$  is undecidable.)*

**Задача 9.6.7.** (a,b,c,d) Сформулируйте и докажите  $n$ -мерные аналоги утверждений 9.2.4 и 9.2.7 (ср. утверждение 9.2.8 и [Sk20, теорема 10.9.3]).

## 9.7 Отображения комплекса в сферу меньшей размерности

Приведем без доказательства описание множества  $[K, S^n]$  для  $(n+1)$ -комплекса  $K$ .

**Теорема 9.7.1** (Стинрод). *Для любых  $n \geq 3$  и  $(n+1)$ -комплекса  $K$  существует биекция*

$$[K, S^n] \xrightarrow{\deg \times St} H^n(K; \mathbb{Z}) \times H^{n+1}(K) / \text{Sq}^2 \rho_2 H^{n-1}(K; \mathbb{Z}).$$

Здесь  $\rho_2 : H^n(K; \mathbb{Z}) \rightarrow H^n(K)$  — приведение по модулю 2. Отображение (операция; стинродов квадрат)  $\text{Sq}^2 : H^{n-1}(K) \rightarrow H^{n+1}(K)$  определяется тем условием, что для отображения  $f : K^{(n-1)} \rightarrow S^{n-1}$ , продолжаемого на  $K^{(n)}$ , элемент  $\text{Sq}^2 \rho_2(\deg f) \in H^{n+1}(K)$  является препятствием  $o(f)$  к продолжению отображения  $f$  на все  $K$ .

**Задача 9.7.2.** \* (a) Определение операции  $\text{Sq}^2$  корректно, т.е. препятствия  $o(f)$  действительно пропускается через  $\rho_2$  и зависит только от  $\deg f$ .

(b) Операция  $\text{Sq}^2$  естественна по  $K$ .

(c) Для 2-коцикла  $a$  элемент  $\text{Sq}^2[a]$  представляется 4-коциклом, «определенным формулой  $b(01234) = a(012)a(234)$ ».

**Задача 9.7.3.** \* Пусть  $K$  есть 4-комплекс.

(a) Для отображения  $f : K^{(2)} \rightarrow S^2$ , продолжаемого на  $K^{(3)}$ , постройте препятствие  $\text{Sq}^2(\deg f) \in H^4(K; \pi_3(S^2))$  к продолжению отображения  $f$  на все  $K$  (аналогично задаче 9.6.4). Получится отображение  $\text{Sq}^2$ , для которого последовательность  $[K, S^2] \xrightarrow{\deg} H^2(K; \mathbb{Z}) \xrightarrow{\text{Sq}^2} H^4(K; \mathbb{Z})$  множеств с отмеченными точками точна.

(b) Пусть  $K$  — ориентируемое 4-многообразие и класс  $a \in H^2(K; \mathbb{Z})$  двойственен по Пуанкаре классу  $Da \in H_2(K; \mathbb{Z})$ , представляющемуся вложением  $h : N \rightarrow K$  замкнутого ориентируемого 2-многообразия (т.е. сферы с ручками)  $N$ . Тогда  $\text{Sq}^2 a$  есть сумма точек (со знаком) в  $hN \cap h'N$ , где  $h'$  — погружение, близкое к  $h$ .

(с) Если  $\alpha \in H^2(K; \mathbb{Z})$ , то  $f_{\text{Sq}^2 \alpha} = f_1 \circ f_\alpha$ , где  $1 \in H^4(\mathbb{C}P^3; \mathbb{Z}) \cong H_2(\mathbb{C}P^3; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$  — образующая и отображения

$$f_{\text{Sq}^2 \alpha} : K \rightarrow K(\mathbb{Z}, 4), \quad f_1 : \mathbb{C}P^3 \rightarrow K(\mathbb{Z}, 4) \quad \text{и} \quad f_\alpha : K \rightarrow \mathbb{C}P^3$$

соответствуют классам  $\text{Sq}^2 \alpha$ , 1 и  $\alpha$  при изоморфизмах

$$H^4(K; \mathbb{Z}) \cong [K, K(\mathbb{Z}, 4)], \quad H^4(\mathbb{C}P^3; \mathbb{Z}) \cong [\mathbb{C}P^3, K(\mathbb{Z}, 4)] \quad \text{и} \quad H^2(K; \mathbb{Z}) \cong [K, \mathbb{C}P^3]$$

из теоремы Эйленберга-Маклейна 9.8.2 ниже.

**Теорема 9.7.4** (Понтрягин). (а) Для любого 3-комплекса  $K$  имеется сюръекция  $\text{deg} : [K; S^2] \rightarrow H^2(K; \mathbb{Z})$  и биекция  $\text{deg}^{-1}(0) \rightarrow H^3(K; \mathbb{Z})$ .

(б) Для любого  $\gamma \in H^2(K; \mathbb{Z})$  имеется биекция  $\text{deg}^{-1}(\gamma) \rightarrow \frac{H^3(K; \mathbb{Z})}{2\gamma \cup H^1(K; \mathbb{Z})}$ .

Вот «определение» произведения  $\cup : H^1(K; \mathbb{Z}) \times H^2(K; \mathbb{Z}) \rightarrow H^3(K; \mathbb{Z})$ : число на симплексе 1234 равно произведению чисел на симплексе 12 и на симплексе 234. Впрочем, это определение естественно появляется при изучении множества  $[K, S^2]$ , поэтому его можно придумать, и не зная определения.

Как по  $\gamma$  быстро найти  $2\gamma \cup H^1(K; \mathbb{Z})$ ?

## 9.8 Отображения комплекса в пространства Эйленберга-Маклейна

Аналог теоремы 9.2.2 неверен для  $K = S^2$ , ибо  $[S^2, \mathbb{R}P^2]$  бесконечно, а  $H^1(S^2) = 0$ . Однако теорему 9.2.2 все-таки можно обобщить на многомерный случай. Следующая теорема обобщает результат о том, что  $[[S^1, \mathbb{R}P^{n+1}]] = 2$  и  $[[S^k, \mathbb{R}P^{n+1}]] = 1$  для любых  $1 < k \leq n$  [Sk20, §14.5] (его можно использовать без доказательства).

**Теорема 9.8.1** (Эйленберга-Маклейна для  $\mathbb{R}P^{n+1}$ ). (а) Для любого  $n$ -многообразия  $N$  существует биекция  $\text{deg} : [N, \mathbb{R}P^{n+1}] \rightarrow H_{n-1}(N, \partial)$ .

(б) Для любого  $n$ -комплекса  $K$  существует биекция  $\text{deg} : [K, \mathbb{R}P^{n+1}] \rightarrow H^1(K)$ .

(с) Для любого  $n$ -комплекса  $K$  утверждение  $A(K, \mathbb{R}P^{n+1})$  верно.

Набросок определения одномерной группы когомологий  $H^1(K)$  и доказательства теоремы Эйленберга-Маклейна (б). Случай  $n = 1$  есть теорема 9.2.2. Приведем набросок доказательства для  $n = 2$  (общий случай аналогичен).

Фиксируем разложение  $\mathbb{R}P^0 \in \mathbb{R}P^1 \subset \mathbb{R}P^2 \subset \mathbb{R}P^3$ . Как и ранее, достаточно классифицировать клеточные отображения, т.е. отображения, переводящие вершины 2-комплекса  $K$  в точку  $\mathbb{R}P^0$ , ребра в  $\mathbb{R}P^1$  и грани в  $\mathbb{R}P^2$ . Для клеточного отображения  $f : K \rightarrow \mathbb{R}P^3$ , как и в теореме 9.2.2 определим **препятствующий коцикл**  $\gamma(f)$ , т.е. расстановку вычетов по модулю 2 на ребрах, для которой сумма чисел по границе любой грани равна нулю. Так как  $[[S^2, \mathbb{R}P^3]] = 1$ , то  $\gamma(f) = \gamma(g)$  влечет  $f \simeq g$ .

Как и ранее, определим **кограницу**  $\delta a$  вершины  $a$ .

Как и ранее, любая гомотопия клеточного отображения  $f$  может быть заменена на клеточную, т.е. такую, для которой образы вершин находятся на  $\mathbb{R}P^1$ , а ребер — на  $\mathbb{R}P^2$ . Так как  $[[S^2, \mathbb{R}P^3]] = 1$ , то  $f \simeq g$  тогда и только тогда, когда

$$\gamma(f) - \gamma(g) = \delta a_1 + \cdots + \delta a_s$$

для некоторых вершин  $a_1, \dots, a_s \in K$ . Назовем такие расстановки  $\gamma(f)$  и  $\gamma(g)$  **когомологичными**.

Определим группу  $H^1(K)$  и отображение  $\deg$  как и в доказательстве теоремы 9.2.2. Тогда отображение  $\deg$  определено корректно. Инъективность этого отображения доказывается аналогично инъективности отображения  $\deg$  из теоремы 9.2.2. Сюръективность доказывается аналогично теореме Брушлинского 9.5.3 с использованием  $|[S^2, \mathbb{R}P^3]| = 1$  [Sk20, §9.2] и с заменой  $\mathbb{Z}$  на  $\mathbb{Z}_2$ .

Доказательство для общего случая аналогично предыдущему. Действительно, любое отображение  $K^{(2)} \rightarrow \mathbb{R}P^{n+1}$  можно продолжить на все  $K$  и любую гомотопию на  $K^{(1)}$  можно продолжить на все  $K$  ввиду  $|[S^k, \mathbb{R}P^{n+1}]| = 1$  для любых  $1 < k \leq n$ . QED

Следующая теорема обобщает результат о том, что степень дает биекцию  $[S^2, \mathbb{C}P^n] = [S^2, \mathbb{C}P^1] \rightarrow \mathbb{Z}$ , а также равенства  $|[S^k, \mathbb{C}P^n]| = 1$  для  $k = 1, 3, 4, 5, \dots, 2n$  [Sk20, §14.5] (их можно использовать без доказательства).

**Теорема 9.8.2** (Эйленберга-Маклейна для  $\mathbb{C}P^n$ ). (a) Для любых  $n \geq 2$  и  $n$ -многообразия  $N$  существует биекция  $\deg : [N, \mathbb{C}P^n] \rightarrow H_{n-2}(N, \partial; \mathbb{Z})$ .

(b) Для любого  $n$ -комплекса  $K$  существует биекция  $\deg : [K, \mathbb{C}P^n] \rightarrow H^2(K; \mathbb{Z})$ .

(c) Для любого  $n$ -комплекса  $K$  утверждение  $A(K, \mathbb{C}P^n)$  верно.

Указание к доказательству п. (b). Случай  $n = 1$  очевиден. Случай  $n = 2$  фактически был доказан в двумерной теореме Хопфа-Уитни:  $[K, \mathbb{C}P^2] = [K, S^2] = H^2(K; \mathbb{Z})$ , поскольку любое отображение  $K \rightarrow \mathbb{C}P^2$  и любая его гомотопия «вытесняются» на  $S^2 = \mathbb{C}P^1 \subset \mathbb{C}P^2$ .

Аналогично доказательству теоремы Эйленберга-Маклейна для  $\mathbb{R}P^{n+1}$ .

Для  $n = 3$  рассмотрим разложение  $v = \mathbb{C}P^0 \in \mathbb{C}P^1 \subset \mathbb{C}P^2 \subset \mathbb{C}P^3$ . Отображение  $f : K \rightarrow \mathbb{C}P^3$  называется *клеточным*, если  $f(K^{(1)}) = v$  и  $f(K^{(3)}) \subset \mathbb{C}P^2$ . Гомотопия  $f_t : K \rightarrow \mathbb{C}P^3$  называется *клеточной*, если  $f_t(K^{(0)}) = v$ ,  $f_t(K^{(2)}) \subset \mathbb{C}P^1$  и  $f_t(K^{(3)}) \subset \mathbb{C}P^2$  для любого  $t$ . Множество  $[K, \mathbb{C}P^3]$  находится в биективном соответствии с множеством клеточных отображений с точностью до клеточной гомотопии — и, тем самым, с  $[K, \mathbb{C}P^2]$ . Используйте биекцию  $[S^2, \mathbb{C}P^2] = [S^2, \mathbb{C}P^1] \rightarrow \mathbb{Z}$  и равенства  $|[S^1, \mathbb{C}P^2]| = |[S^3, \mathbb{C}P^2]| = 1$  [Sk20, §8].

Для произвольного  $n$  доказательство аналогично. QED

Для любого  $n$  существует [FF89] (как правило, бесконечномерный) комплекс  $K(\mathbb{Z}, n)$ , для которого

$$[S^n, K(\mathbb{Z}, n)] \cong \mathbb{Z} \quad \text{и} \quad |[S^k, K(\mathbb{Z}, n)]| = 1 \quad \text{для любого} \quad k \neq n.$$

Например,  $K(\mathbb{Z}, 1) \cong S^1$  и  $K(\mathbb{Z}, 2) \cong \mathbb{C}P^\infty$ .

**Теорема 9.8.3** (Эйленберга-Маклейна). Для любого комплекса  $K$  существует биекция  $\deg : [K, K(\mathbb{Z}, n)] \rightarrow H^n(K; \mathbb{Z})$ .

Для абелевой группы  $\pi$  можно определить (вообще говоря, бесконечномерный) комплекс  $K(\pi, n)$ , и для комплекса  $K$  можно определить группу  $H^n(K; \pi)$  так, чтобы существовала биекция  $\deg : [K, K(\pi, n)] \rightarrow H^n(K; \pi)$ .

## 10 Трехмерные утолщения двумерных комплексов

### 10.1 Двумерные утолщения графов

Определения (двумерных) утолщений графов и их ориентируемости, графов с вращениями и их эквивалентности, даны в [Sk20, §§1.6, 2.8, 2.9].

**Теорема 10.1.1** (критерий ориентируемости). *Каждое из следующих условия на утолщение  $(N, G)$  графа  $G$  равносильны его ориентируемости:*

(M)  $(N, G)$  не содержит пары из ленты Мебиуса и его средней линии.

(E) в каждом несамопересекающемся цикле в (любом) графе с вращениями, отвечающем утолщению, четное количество ребер с единицами.

(W) первый класс Штифеля-Уитни  $w_1(N, G) \in H^1(G)$  нулевой.

Критерий (W) интересен не сам по себе, а как иллюстрация теории препятствий и шаг к классификации утолщений (см. ниже).

*Доказательство критериев (M) и (E).* Ясно, что (M) эквивалентно (E), и что условие (E) необходимо для ориентируемости. Докажем его достаточность.

Рассмотрим остов  $T$  графа  $G$ . Существует утолщение, эквивалентное данному, для которого на ребрах остова  $T$  стоят нули. Возьмем несамопересекающийся цикл, образованный произвольным ребром  $e$  вне остова и некоторыми ребрами остова. В этом цикле четное количество ребер с единицами, ибо это свойство не меняется при инвертировании. Поэтому в данном утолщении на ребре  $e$  стоит ноль. Значит, данное утолщение ориентируемо. QED

*Определение группы  $H^1(G)$ , класса  $w_1(N, G)$  и доказательство критерия (W).* Обозначим данное утолщение через  $o$ . Назовем соответствующую расстановку нулей и единиц на ребрах графа  $G$  *препятствующей* и обозначим ее  $\omega(o)$ . Если  $\omega(o) = 0$ , то утолщение ориентируемо.

Если  $\omega(o) \neq 0$ , то еще не все потеряно: можно попытаться сделать инвертирования так, чтобы препятствующая расстановка стала нулевой. Выясним, как  $\omega(o)$  меняется при инвертированиях. Для этого заметим, что расстановки можно складывать: для этого просто складываются числа, стоящие на каждом ребре (такое сложение называется *покомпонентным*). При инвертировании к  $\omega(o)$  прибавляется расстановка единиц на ребрах, выходящих из  $a$ , и нулей на всех остальных ребрах. Эта расстановка называется *элементарной кограницей вершины  $a$*  и обозначается  $\delta a$ . Ясно, что если утолщения  $o$  и  $o'$  получаются друг из друга инвертированиями в вершинах  $a_1, \dots, a_k$ , то

$$\omega(o) - \omega(o') = \delta a_1 + \dots + \delta a_k.$$

Назовем *кограницей* сумму элементарных кограниц нескольких вершин. Назовем расстановки  $\omega_1$  и  $\omega_2$  *когомологичными*, если  $\omega_1 - \omega_2$  есть кограница  $\delta a_1 + \dots + \delta a_k$ . Ясно, что

(i) При инвертировании препятствующая расстановка утолщения заменяется на когомологичную расстановку.

(ii) Если препятствующая расстановка утолщения является кограницей, то существует эквивалентное утолщение с нулевой препятствующей расстановкой.

(iii) Когомологичность является отношением эквивалентности на множестве всех расстановок нулей и единиц на ребрах.

*Одномерной группой когомологий графа  $G$  (с коэффициентами в  $\mathbb{Z}_2$ )* называется группа  $H^1(G)$  расстановок с точностью до когомологичности.

Первым классом Штифеля-Уитни утолщения называется класс кохомологичности препятствующей расстановки этого утолщения:

$$w_1(N, G) = [\omega(o)] \in H^1(G).$$

Это определение корректно ввиду утверждения (i).

Ясно, что  $w_1(N, G)$  является препятствием к ориентируемости утолщения. Обратное, пусть  $w_1(N, G) = 0$ . Значит, препятствующая расстановка данного утолщения является кограницей. Тогда по (ii) утолщение ориентируемо. QED

**Задача 10.1.2** (ср. с задачей 9.2.4). (a) Для любого 1-цикла  $g$  произведение  $\omega(o) \cdot g$  не зависит от расстановки  $o$ .

(Значит, формула  $w_1^*(N, G)[g] = \omega(o) \cdot g$  корректно задает линейную функцию  $w_1^*(N, G) : H_1(G) \rightarrow \mathbb{Z}_2$ . Т.е. первый класс Штифеля-Уитни определяет отображение из множества утолщений в множество линейных функций  $H_1(G) \rightarrow \mathbb{Z}_2$ .)

(b)  $w_1(N, G) = 0$  тогда и только тогда, когда функция  $w_1^*(N, G)$  нулевая.

(c) Отображение  $\varphi : H^1(G) \rightarrow (H_1(G))^*$ , заданное формулой  $\varphi[\nu](h) = \nu \cdot h$  переводит  $w_1(N, G)$  в  $w_1^*(N, G)$  для любого утолщения  $(N, G)$ .

**Задача 10.1.3.** (a) Два ориентированных вращения на одном связном графе эквивалентны тогда и только тогда, когда одно получается из другого обращением ориентации циклических порядков во всех вершинах.

(b) Утолщения, отвечающие эквивалентным графам с вращениями, одновременно вырезаемы из данной поверхности или нет.

(c) Гомеоморфные графы имеют одинаковое количество классов эквивалентности ориентируемых вращений (вращений).

**Задача 10.1.4.** Сколько классов эквивалентности ориентированных вращений (вращений) на

- (a) окружности, (b) пути, (c) триоде,  
(d) дереве, (e) восьмерке, (f) букве  $\Theta$ ?

**Задача 10.1.5.** (a) Число классов эквивалентности ориентированных вращений (вращений) на связном графе, имеющем только вершины степени 3 и имеющем  $V$  вершин и  $E$  ребер, равно  $2^{V-1}$  ( $2^E$ ).

(b) *Классификация вращений на графе.* Пусть  $G$  — связный граф, не гомеоморфный точке, окружности или отрезку. Если в  $G$  имеется  $V$  вершин степеней  $k_1, \dots, k_V$  и  $E = \frac{1}{2}(k_1 + \dots + k_V)$  ребер, то количества классов эквивалентности ориентируемых вращений и вращений на этом графе равны соответственно

$$\frac{1}{2}(k_1 - 1)! \cdots (k_V - 1)! \quad \text{и} \quad 2^{E-V}(k_1 - 1)! \cdots (k_V - 1)!.$$

## 10.2 Трехмерные утолщения графов

**Трехмерная лента Мебиуса** получается из трехмерного цилиндра

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq 1, 0 \leq z \leq 1\}$$

склеивкой точек  $(x, y, 0)$  и  $(x, -y, 1)$  для всех  $x, y$ . Эта склейка осуществляется не в трехмерном пространстве, а в четырехмерном пространстве или абстрактно.

**Задача 10.2.1.** (a) Чему гомеоморфен край трехмерной ленты Мебиуса?

(b) Вложим ли полный 2-комплекс с 6 вершинами в трехмерную ленту Мебиуса?

**Задача 10.2.2.** (a,b,c,(3),..., (32),  $\sigma$ ) Какие из склеек задач 6.1.2-6.1.4 можно осуществить в трехмерной ленте Мебиуса?

Возьмем трехмерный шар. Отметим на его граничной сфере попарно непересекающиеся двумерные диски, разбитые на пары. Каждую пару  $D^2 \times \{0, 1\}$  дисков соединим (не обязательно в трехмерном пространстве) трехмерной трубкой  $D^2 \times [0, 1]$  (так, чтобы трубки попарно не пересекались). Объединение шара и построенных трубок называется **шаром с трубками**.

Заметим, что каждую пару дисков можно соединить трубкой двумя способами. При первом способе ориентация краевой сферы при проносе вдоль трубки совмещается с противоположной ориентацией; такая трубка называется *неперекрученной*. При втором способе эта ориентация совмещается с собой; такая трубка называется *перекрученной*.

Шару с трубками гомеоморфны

- часть пространства  $\mathbb{R}^3$ , ограниченная стандартной сферой с ручками;
- некоторая окрестность любого графа, кусочно-линейно вложенного в  $\mathbb{R}^3$ ;
- трехмерная лента Мебиуса;
- некоторая окрестность любого графа, вложенного в трехмерную ленту Мебиуса;
- некоторая окрестность любого графа, вложенного в шар с трубками.

**Задача 10.2.3.** Любой ли шар с трубками можно вырезать из трехмерной ленты Мебиуса?

Аналогично определяется объединение шаров и трубок, в котором трубки могут соединять диски на разных шарах. Приведем детали. Возьмем несвязное объединение трехмерных шаров, отвечающих вершинам данного графа  $G$ . На каждой из их граничных сфер возьмем попарно непересекающиеся двумерные диски, отвечающие выходящим из соответствующей вершины ребрам. Для каждого ребра графа соединим (не обязательно в трехмерном пространстве) соответствующие ему два диска трехмерной трубкой  $D^2 \times [0, 1]$ . Обозначим через  $M$  объединение построенных шаров и трубок. Граф  $G$  естественно вложен в  $M$ . Пара  $(M, G)$  называется **трехмерным утолщением (3-утолщением)** графа  $G$ .

**Задача 10.2.4.** (а) Сформулируйте и докажите трехмерный аналог критерия ориентируемости 10.1.1.

(b) Трехмерное утолщение отрезка (и даже дерева) гомеоморфно шару.

(c) Чему может быть гомеоморфно 3-утолщение окружности?

(d) Любое ориентируемое 3-утолщение графа вложимо в  $\mathbb{R}^3$  (т.е. соответствующую конструкцию можно проделать без самопересечений в  $\mathbb{R}^3$ ).

(e) Любое ориентируемое 3-утолщение связного графа с  $V$  вершинами и  $E$  ребрами гомеоморфно шару с  $E - V + 1$  ручками (handlebody).

(f) Любое 3-утолщение графа вложимо в  $\mathbb{R}^4$ .

(g) Любое 3-утолщение связного графа гомеоморфно шару с трубками.

**Задача 10.2.5.** Два 3-утолщения одного графа  $G$  называются *эквивалентными*, если они гомеоморфны неподвижно на  $G$ .

(а) Для связного графа с  $V$  вершинами и  $E$  ребрами имеется  $2^{E-V+1}$  трехмерных утолщений с точностью до эквивалентности.

(b) На граничной сфере каждого шара из определения 3-утолщения введем ориентацию. Трубка из определения 3-утолщения называется *перекрученной*, если ориентации на двух ее противоположных основаниях, лежащих в шарах, совпадают. Трубка называется *неперекрученной*, если эти ориентации противоположны.

Два 3-утолщения одного графа эквивалентны тогда и только тогда, когда можно изменить ориентации на их сферах так, чтобы для каждого ребра трубки в двух 3-утолщениях, соответствующие этому ребру, были одновременно перекручены или нет.

**Задача 10.2.6.** Сформулируйте и докажите аналоги приведенных результатов для  $n$ -мерных утолщений графов.

Ответ к 10.2.2.σ. σ-склею можно осуществить для перестановок σ, сопряженных перестановкам из подгруппы диэдра.

### 10.3 Утолщаемость 2-комплексов до 3-многообразий

Понятия утолщаемости и утолщения полезны, например, для изучения

- *вложимости 2-комплексов в  $\mathbb{R}^3$*  путем рассмотрения «минимальных» 3-многообразий, содержащих данный 2-комплекс, и распознавания вложимости в  $\mathbb{R}^3$  таких 3-многообразий (см. теорему 6.6.1 для  $d = 3 = k + 1$ );

- *гомеоморфности 3-многообразий* путем рассмотрения эквивалентности лежащих в них 2-комплексов (см. теоремы 10.4.1.ab).

- *фундаментальных групп 3-многообразий* путем рассмотрения вложимости в 3-многообразия 2-комплексов, отвечающих копредставлениям групп.

Ср. с задачами о реализуемости 2-комплексов в  $\mathbb{R}^3$  ([Sk14] и §6).

**Задача 10.3.1.** Приклеим к полноторию  $D^2 \times S^1$  трехмерную пробку  $D^2 \times [0, 1]$ , отождествляя с кольцом  $\partial D^2 \times [0, 1]$  окрестность в краевом торе

(а) малой окружности. Результат приклейки гомеоморфен окрестности в  $\mathbb{R}^3$  букета  $S^2 \vee S^1$ .

(б) окружности, полученной из окружности  $(1, 0) \times S^1$  (параллели) «несколькими оборотами вдоль окружности  $S^1 \times (1, 0)$  (меридиана)». Результат приклейки гомеоморфен  $D^3$ .

(с) окружности  $\partial D^2 \times (1, 0)$ . Результат приклейки гомеоморфен дополнению до трехмерного шара в  $S^1 \times S^2$ .

Краем шара с трубками является сфера с перекрученными ручками. Отметим на ней попарно непересекающиеся кольца. К каждому кольцу (отождествленному с)  $S^1 \times [0, 1]$  приклеим (не обязательно в трехмерном пространстве) трехмерную пробку  $D^2 \times [0, 1]$  (так, чтобы пробки попарно не пересекались). Объединение шара с трубками и построенных пробок называется *шаром с трубками и пробками*.

**Задача 10.3.2.** (а) Бутылка Клейна; (б) Проективная плоскость;

(с) Любое 2-многообразие;

(д) тело 2-комплекса, получающееся из двумерного правильного многоугольника склейкой всех сторон в одну (не обязательно с направлениями, согласованными вдоль границы многоугольника; впрочем, начните с этого частного случая);

вложим(а)(о) в некоторый шар с неперекрученными трубками и пробками.

**Задача 10.3.3.** (а) Шар с трубками и пробками ориентируем тогда и только тогда, когда нет перекрученных трубок.

(б) Любой шар с трубками и пробками вложим в  $\mathbb{R}^5$ .

(с) Любое вложение шара с трубками  $\mathbb{R}^5$  (или даже в 5-многообразии) можно продолжить до вложения шара с трубками и (наперед заданными) пробками.

**Задача 10.3.4.** (а) Любое связное 3-многообразие с непустым краем гомеоморфно шару с трубками и пробками.

Указание: используйте утверждения 10.5.2.

(б) Любое связное ориентируемое 3-многообразие с непустым краем гомеоморфно шару с неперекрученными трубками и пробками.

(с) Объединение двух шаров с трубками по некоторым двум наборам из одинакового количества колец на их краях гомеоморфно шару с трубками.

(д) То же для шаров с трубками и пробками.

(е) Любое связное 3-многообразие с непустым краем вложимо в  $\mathbb{R}^5$ .

(ф) Любое связное  $n$ -многообразие с непустым краем вложимо в  $\mathbb{R}^{2n-1}$ .



**Задача 10.3.5.** Приклеим к каждой компоненте края связного 2-многообразия с краем по кольцу, отождествляя эту компоненту со срединной окружностью кольца. Полученный 2-комплекс вложим в  $\mathbb{R}^3$ .

**Задача 10.3.6.** Вложимо ли в некоторый шар с трубками и пробками объединение ленты Мебиуса и следующего 2-многообразия  $X$ , при котором краевая окружность  $\partial X$  (или одна из них в п. (а)) отождествляется со «средней линией»  $S$  ленты Мебиуса?

- (а)  $X$  — кольцо (ср. с задачей 10.2.2.(211)); (б)  $X$  — диск;  
 (с)  $X$  — тор с дыркой; (д)  $X$  — лента Мебиуса.

*Указание.* Если эти задачи не получаются, то вернитесь к ним позже.

2-комплекс называется *утолщаемым*, если он вложим в некоторый (не фиксированный заранее) шар с трубками и пробками. 2-комплекс называется *ориентируемо утолщаемым*, если он вложим в некоторый (не фиксированный заранее) шар с неперекрытыми трубками и пробками. Вот определения на общепринятом языке. 2-комплекс называется (*ориентируемо*) *утолщаемым*, если он гомеоморфен подкомплексу некоторой триангуляции некоторого (ориентируемого) 3-многообразия; это 3-многообразие не фиксировано заранее. (Это определение *кусочно-линейной* утолщаемости, равносильное *топологической* [Vi83].)

**Теорема 10.3.7.** *Существуют алгоритмы проверки утолщаемости и ориентируемой утолщаемости произвольных 2-комплексов.*

Этот результат вытекает из теоремы 10.7.1. По-видимому, он является фольклорным; см. опубликованное доказательство в [Sk94]. См. также [To11].

**Задача 10.3.8.** (а) 2-комплекс ориентируемо утолщаем тогда и только тогда, когда некоторая окрестность (или, эквивалентно, регулярная окрестность) его 1-остова ориентируемо утолщаема.

- (б) Аналогичное свойство для утолщаемости неверно.

**Теорема 10.3.9.** *Любой  $n$ -комплекс вложим в некоторое  $2n$ -многообразие.*

**Гипотеза 10.3.10.** *For any  $n$  there is an  $n$ -complex locally embeddable into  $\mathbb{R}^{2n}$  but non-embeddable into any  $(2n - 1)$ -manifold. (Hint: prove and use [ORS, conjecture in p. 400].)*

*Набросок доказательства утверждения 10.3.8.а.* Достаточно доказать часть «тогда» для регулярной окрестности. Обозначим через  $M_1$  ее ориентируемое 3-утолщение, а через  $P$  комплекс. Замыкание  $P_- := \text{Cl}(P - M_1)$  есть несвязное объединение дисков. Край  $\partial P_-$  является несвязным объединением окружностей. Можно считать, что  $\partial P_- \subset \partial M_1$ . Так как каждая трубка в  $M_1$  не перекручена, то  $\partial M_1$  ориентируемо. Поэтому существует окрестность края  $\partial P_-$  в  $\partial M_1$ , являющаяся несвязным объединением колец (а не лент Мебиуса). Приклеим пробки по этим кольцам. Получим шар с неперекрытыми трубками и пробками, содержащий  $P$ .

## 10.4 Ложные поверхности и их утолщаемость

2-комплекс (или его тело) называется **ложной поверхностью**, если каждая его точка имеет окрестность, PL гомеоморфную одной из следующих: диску  $D^2$ , книжке с тремя страницами  $T \times I$  или конусу над полным графом  $K_4$  с четырьмя вершинами, см. рис. 10.4.1. Такие точки мы будем называть *точками типа 1, 2 и 3*, соответственно.

*Примерами ложных поверхностей* являются

- объединение тора с двумя дисками, приклеенными к параллели и меридиану тора,

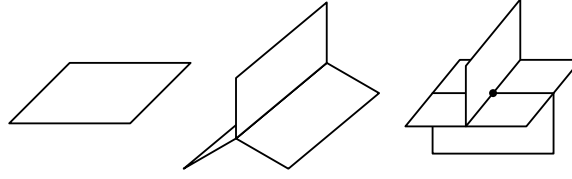


Рис. 10.4.1: Простейшие особенности

- объединение  $N$  ленты Мебиуса и кольца, для которого средняя линия ленты Мебиуса склеивается с одной из краевых окружностей кольца (или, эквивалентно, 2-комплекс, полученный из книжки с 3 листами (12)(3)-склейкой, см. определение перед задачей 6.1.3),

- дом Бинга с двумя комнатами (см. определение в [HMS]).

Шутовской колпак Зимана (задача 6.1.1.a) не является ложной поверхностью.

Мыльные пленки в  $\mathbb{R}^3$  имеют особенности в точности типов 2 и 3. Понятие мыльных пленок из дифференциальной геометрии является также важным средством и объектом исследований в алгебраической и геометрической топологии. Вот примеры ((a,b) — знаменитые теоремы Кэслера).

**Задача 10.4.1.** (a) Любое 3-многообразие является утолщением некоторой ложной поверхности (и даже *специального 2-полиэдра*<sup>33</sup>) [HMS, I, Theorem 3.1.b].

(b) Регулярные окрестности одного специального 2-полиэдра  $P$  в разных 3-многообразиях гомеоморфны, даже неподвижно на  $P$  ([HMS]; ср. с теоремой 10.6.2).

(c) Для любого 2-комплекса  $P$  существует сюръективное отображение  $f : Q \rightarrow P$  ложной поверхности  $Q$  («резольвента»), прообразы точек при котором являются шарами размерности 0, 1 или 2 (и, в частности, стягиваемы) [RS00].

**Настоящим 1-остовом**  $Q'$  ложной поверхности  $Q$ , называется множество точек типа 2 или 3 в  $Q$ . Ясно, что  $Q'$  является графом, вершины которого имеют степени 1, 2 или 4. Группы  $H^1(Q')$  и  $H^2(Q, Q')$ , а также **инварианты Матвеева**  $m(Q) \in H^1(Q')$  и  $\delta m(Q) \in H^2(Q, Q')$  естественно возникают при исследовании утолщаемости (ср. с теоремой 10.1.1.W). Они строго определяются в эвристическом рассуждении в §10.5.

**Теорема 10.4.2.** (a) Ложная поверхность ориентируемо утолщаема тогда и только тогда, когда она не содержит  $N$  [BP97, BRS99].

(b) Ложная поверхность  $Q$  ориентируемо утолщаема тогда и только тогда, когда  $m(Q) = 0$  [BRS99, La00].

(c) Ложная поверхность  $Q$  утолщаема тогда и только тогда, когда  $\delta m(Q) = 0$  [Ma73].

**Задача 10.4.3.** Существует неутолщаемая ложная поверхность, не содержащая никакого объединения ленты Мебиуса и 2-многообразия ровно с одной краевой граничной окружностью, отождествленной со средней линией ленты Мебиуса [BRS99].

## 10.5 Доказательство теоремы 10.4.2 об утолщаемости

Необходимость в теореме 10.4.2.a следует из неутолщаемости комплекса  $N$ . Для локальности достаточности введем следующие определения.

Назовем **звездой** вершины  $A$  в комплексе  $K$  комплекс

$$\text{st}_K A = \cup \{ \sigma \in K : A \in \sigma \}.$$

<sup>33</sup>Ложная поверхность  $Q$  называется *специальным 2-полиэдром*, если  $Q - Q'$  и  $Q' - Q''$  являются несвязными объединениями открытых 2- и 1- дисков соответственно.

Назовем **линком** вершины  $A$  в комплексе  $K$  комплекс

$$\text{lk}_K A = \cup \{ \sigma \in K : A \not\subset \sigma \subset \text{st}_K A \}.$$

Для 2-комплекса  $K$  это граф,

- вершины которого соответствуют ребрам 2-комплекса  $K$ , выходящим из  $A$ ;
- две вершины соединены ребром, если соответствующие ребра лежат в одной грани.

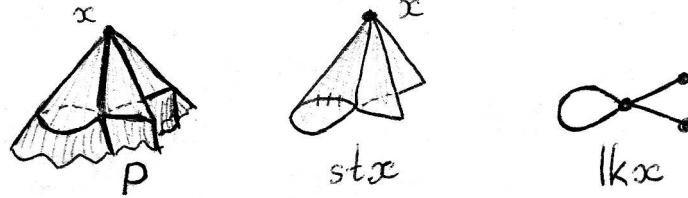


Рис. 10.5.1: Построение звезды и линка

Например, линки точек на рис. 10.4.1 гомеоморфны пути, окружности, триоде  $T = K_{3,1}$ , букве  $\theta$  (т.е. графу  $K_{3,2}$ ) и графу  $K_4$ .

**Задача 10.5.1.** (а) Найдите линки вершин для 2-комплексов на рис. 6.3.1.

(б) Линк каждой вершины 2-комплекса  $K_5 \times S^1$  изоморфен  $K_{4,2}$ .

(с) Для любого графа найдется 2-комплекс и его вершина, линк которой является заданным графом.

(д)  $\text{lk}_K A = \cup \{ \sigma \in K : A \not\subset \sigma \subset \alpha \ni A \text{ для некоторого симплекса } \alpha \}$ .

(е) Звезда вершины является конусом над ее линком.

(ф) Линки одной вершины в гомеоморфных триангуляциях (каждая из которых содержит эту вершину) гомеоморфны.

Define the *simplicial neighbourhood* of a subcomplex  $A$  of a complex  $K$  by

$$\text{St}_K A = \cup \{ \sigma \in K : A \cap \sigma \neq \emptyset \}.$$

Define the *boundary* of a *simplicial neighbourhood* of a subcomplex  $A$  of a complex  $K$  by

$$\text{Lk}_K A = \cup \{ \sigma \in K : \sigma \subset \text{St}_K A, A \cap \sigma = \emptyset \}.$$

A **regular neighbourhood**  $R_K(A)$  of a subcomplex  $A$  (of a triangulation) of a PL manifold  $K$  is a simplicial neighborhood  $\text{St}_{K_1} A_1$  in some subdivision  $(K_1, A_1)$  of  $(K, A)$  such that

- $|\text{St}_{K_1} A_1|$  is a compact manifold with boundary  $|\text{Lk}_{K_1} A_1|$ ;
- for the simplicial map  $\chi_{A_1} : K_1 \rightarrow [0, 1]$  equal on vertices of  $K_1$  to the characteristic function of vertices of  $A_1$ , we have  $A_1 = \chi_{A_1}^{-1}(1)$ .

Cf. [RS72, Theorem 3.11].

**Задача 10.5.2.** (а) Регулярная окрестность любого связного 2-комплекса в триангуляции 3-многообразия существует и гомеоморфна шару с трубками и пробками.

(б) Любое связное 3-многообразие с непустым краем сдавливается на тело некоторого связного 2-комплекса. (Определение сдавливания, приведено, например, в [RS72, §3] [Sk20, §5.8].)

(с) Если  $X, A$  — подкомплексы в 3-многообразии  $M$ , существует  $R_M(A)$  и  $X$  сдавливается на  $A$ , то  $R_M(X)$  существует и  $R_M(X) \cong R_M(A)$ .

(д) Simplicial neighborhood in the second barycentric subdivision is a regular neighborhood.

(е) If the simplicial neighborhood  $U$  of a subcomplex  $A$  collapses to  $A$ , then  $U$  is a regular neighborhood.

*Доказательство достаточности в теореме 10.4.2.a.* Обозначим через  $Q''$  множество точек типа 3 в ложной поверхности  $Q$ . Возьмем по точке на каждой компоненте связности графа  $Q'$ , являющейся циклом. Обозначим через  $V$  объединение взятых точек с  $Q''$ . Так как линк каждой точки из  $V$  — планарный граф, то существует несвязное объединение  $M_0$  трехмерных шаров, содержащее окрестность множества  $V$  (в  $Q$ ).

Для каждой дуги из  $Q' - M_0$  возьмем трехмерную трубку  $D^2 \times [0, 1]$ , в которую окрестность (в  $Q$ ) этой дуги вложена стандартным образом. Эта окрестность «высекает» на торцах  $D^2 \times \{0, 1\}$  трубки триоды. Приклеим эту трубку по торцам к соответствующим шарам из  $M_0$  так, чтобы триоды на торцах трубки совместились с соответствующими триодами на шарах из  $M_0$ . Получим шар с трубками  $M_1$ , содержащий окрестность (в  $Q$ ) графа  $Q'$ .

В следующем абзаце доказана непрерывность каждой трубки.

Для любой вершины  $A \in Q''$  и для любых вершин  $B, C \in \text{lk } A$  степени больше 2 существуют три пути в  $\text{lk } A$ , соединяющих  $B$  с  $C$  и попарно пересекающихся только в  $B, C$ . Поэтому для любой окружности  $J \subset Q'$  существует подкомплекс  $\widehat{J} \subset Q$ , получающийся из книжки с 3 листами  $T \times [0, 1]$  склейкой триодов  $T \times 0$  и  $T \times 1$  по некоторой перестановке их ребер, причем окружность  $J$  получается этой склейкой из «корешка» книжки. Любая перестановка 3-элементного множества является либо тождественной, либо циклом длины 3, либо циклом длины 2 (транспозицией). Так как  $Q$  не содержит  $N$ , то циклом длины 2 она быть не может. Поэтому каждая трубка не перекручена.

Теперь аналогично утверждению 10.3.8.a  $Q$  ориентируемо утолщаемо. Вместо пробок берем несвязное объединение  $Y$  шаров с непрерывными трубками и пробками (т.е. ориентируемое 3-многообразие), содержащее  $Q_- := \text{Cl}(Q - M_1)$ , причем  $\partial Q_- \subset \partial Y$ . Существуют окрестности  $\widehat{M}_1$  и  $\widehat{Y}$  края  $\partial Q_-$  в  $\partial M_1$  и в  $\partial Y$ , являющиеся несвязным объединением колец. Тогда по утверждению 10.3.4.d  $M_1 \bigcup_{\widehat{M}_1 = \widehat{Y}} Y$  есть шар с непрерывными трубками и пробками, содержащий  $Q$ .  $\square$

*Начало эвристики к теоремам 10.4.2.bc.* Как и в доказательстве достаточности в п. (a), определим  $V$  и возьмем несвязное объединение  $M_0$  трехмерных шаров, содержащее окрестность (в  $Q$ ) множества  $V$ .

Пересечение  $Q \cap \partial M_0$  является несвязным объединением (по всем вершинам комплекса  $Q$ ) графов, каждый из которых есть либо  $K_4$ , либо буква  $\theta$ , либо окружность. Поскольку существует ровно одно (с точностью до гомеоморфизма сферы  $S^2$ ) вложение каждого из этих трех графов в сферу, то  $M_0$  единственно (с точностью до гомеоморфизма, неподвижного на  $Q \cap M_0$ ).

Построим утолщение окрестности 1-остова  $Q^{(1)}$  аналогично доказательству достаточности в п. (a) следующим образом. Для каждой дуги из  $Q^{(1)} - M_0$  возьмем ее окрестность в  $Q - M_0$ , гомеоморфную книжке с одной, двумя или тремя листами (сама дуга соответствует «корешку» книжки). Возьмем трехмерную трубку  $D^2 \times [0, 1]$ , в которую эта окрестность вложена стандартным образом. Эта окрестность «высекает» на торцах  $D^2 \times \{0, 1\}$  трубки либо триод, либо отрезок. Приклеим каждую такую трубку по ее торцам к соответствующим шарам из  $M_0$  так, чтобы триоды или отрезки на торцах трубки совместились с соответствующими триодами или отрезками на шарах. Получим шар с трубками  $M_1$ , содержащий окрестность 1-остова  $Q^{(1)}$ .

Если ребро из  $Q^{(1)} - M_0$  лежит в  $Q'$ , то на торцах трубки высекаются триоды. Значит, эта трубка приклеивается к  $M_0$  однозначно. Поэтому утолщение  $M'_1$  окрестности графа  $Q'$  единственно с точностью до гомеоморфизма, неподвижного на  $Q \cap M'_1$ .

Выясним, продолжается ли «утолщение»  $M_1$  до утолщения всего  $Q$ . Фиксируем набор ориентаций на несвязном объединении  $\partial M_0$  сфер. На каждом ребре комплекса  $Q$

поставим 0, если ориентации торцов соответствующей трубки, определенные из  $\partial M_0$ , не согласованы вдоль трубки. Поставим 1 в противном случае. Эту расстановку назовем *различающей* и обозначим  $\omega(M_1)$ .

*Завершение эвристики к теореме 10.4.2.b.* Кограницей  $\partial v$  вершины  $v$ , называется расстановка единиц на ребрах, примыкающих к  $v$ , и нулей на остальных ребрах. Группой одномерных когомологий графа  $Q'$  называется группа  $H^1(Q')$  расстановок нулей и единиц на ребрах  $Q$  с точностью до сумм кограниц вершин. Назовем *препятствием Матвеева*

$$m(Q) := [\omega(M_1)|_{Q'}] \in H^1(Q').$$

Далее теорема 10.4.2.b доказывается аналогично теоремам 10.4.2.a.c.

**Задача 10.5.3.** Для любого вложения  $f : Q \rightarrow M$  ложной поверхности в 3-многообразии имеем  $m(Q) = f^*w_1(M)|_{Q'}$ .

*Набросок доказательства.* Возьмем расстановки  $\omega$  и  $\mu$  нулей и единиц на ребрах графа  $Q'$ , представляющие классы  $m(Q)$  и  $f^*w_1(M)|_{Q'}$ , соответственно. Обозначим через  $d_1, \dots, d_n$  ребра простой замкнутой кривой в  $Q'$ . Тогда  $\sum_{i=1}^n \mu(d_i) = \sum_{i=1}^n \omega(d_i)$ , поскольку оба выражения равны единице в точности тогда, когда прохождение вдоль кривой обращает ориентацию на  $M$ . Ввиду произвольности выбора кривой получаем  $m(Q) = f^*w_1(M)|_{Q'}$ .

*Завершение эвристики к теореме 10.4.2.c.* На каждой грани поставим сумму по модулю 2 чисел расстановки  $\omega(M_1)$  на ограничивающих ее ребрах. Полученную расстановку назовем *препятствующей* и обозначим  $\delta\omega(M_1)$ . Ясно, что  $\delta\omega(M_1)$  не зависит от набора ориентаций на  $\partial M_0$  (хотя  $\omega(M_1)$  от него зависит).

Если существует «продолжение» утолщения  $M_1$  до утолщения всего  $Q$ , то у каждой грани существует малая окрестность (в  $Q$ ), пересекающаяся с  $\partial M_1$  по кольцу (а не по ленте Мебиуса). Тогда  $\delta\omega(M_1)$  равна нулю на этой грани (ввиду результата задачи 10.3.6.b). Следовательно, если  $\delta\omega(M_1) \neq 0$ , то  $M_1$  не «продолжается» до утолщения всего 2-комплекса  $Q$ .

Однако, если  $\delta\omega(M_1) \neq 0$ , то еще не все потеряно: можно попытаться изменить  $M_1$  так, чтобы препятствующая расстановка  $\delta\omega(M_1)$  стала нулевой. Выясним, какие бывают различающие расстановки  $\omega(M_1)$  для различных  $M_1$ . Утолщение графа  $Q'$  единственно. Значит, расстановка  $\omega(M_1)$  на ребрах *из*  $Q'$  не зависит от  $M_1$ . Трубки, соответствующие ребрам *вне*  $Q'$  могут быть приклеены к  $M_0$  двумя способами. При этих способах на ребре будет поставлено 0 или 1. Таким образом, мы можем так подобрать  $M_1$ , что расстановка  $\omega(M_1)$  на ребрах *вне*  $Q'$  будет любой наперед заданной.

Изменение «утолщения»  $M_1$  на одном ребре  $e$  из  $Q^{(1)}$ , не лежащем в  $Q'$ , дает изменение расстановки  $\delta\omega(M_1)$  на (двух или одной) гранях, примыкающих к  $e$ . Иными словами, к  $\delta\omega(M_1)$  прибавляется *кограница*  $\delta e$  ребра  $e$ , т.е. расстановка единиц на гранях, примыкающих к  $e$ , и нулей на остальных гранях.

Назовем *группой двумерных когомологий комплекса  $Q$  по модулю  $Q'$*  группу  $H^2(Q, Q')$  расстановок нулей и единиц на гранях комплекса  $Q$  с точностью до сумм кограниц ребер, не лежащих в  $Q'$ . Назовем *препятствием Матвеева*

$$\delta m(Q) := [\delta\omega(M_1)] \in H^2(Q, Q').$$

Если  $\delta m(Q) = 0$ , то существует такое утолщение  $M_1$ , что  $\delta\omega(M_1) = 0$ . Это утолщение  $M_1$  можно продолжить до утолщения всего  $Q$ . Получаем критерий 10.4.2.c.

## 10.6 Классификация 3-утолщений ложных поверхностей

Шар с трубками и пробками  $M$  содержит 2-комплекс  $P$ , полученный из букета окружностей, отвечающих трубкам, приклейкой дисков, отвечающих пробкам. При этом вершина букета содержится в шаре, дополнение букета до некоторой окрестности вершины — в объединении трубок, а дополнение объединения дисков до окрестности букета — в объединении пробок. Заметим, что неутолщаемый 2-комплекс невозможно получить этой конструкцией. Пара  $(M, P)$  называется *3-утолщением* 2-комплекса  $P$  (или его тела). Это определение равносильно обычному: пара  $(M, P)$  называется  *$n$ -утолщением* комплекса  $P$ , если  $n$ -многообразие  $M$  является *регулярной окрестностью* [Sk20, §1.5] комплекса  $P \subset \text{Int } M$ . Понятие утолщения аналогично понятию расслоения и тесно связано с ним [Sk20, §13], [LS69].

**Задача 10.6.1.** (а) 2-утолщение (определите!)  $\mu$  края  $\partial N$  продолжается (определите!) до 3-утолщения 2-многообразия  $N$  тогда и только тогда, когда  $\delta w_1(\mu) = 0 \in H^2(N, \partial N)$ . (Определения объектов  $\delta w_1(\mu)$  и  $H^2(N, \partial N)$  не обязательно знать заранее, они естественно возникают в процессе исследования продолжаемости.)

(с) Сформулируйте и докажите аналог пункта (а) для продолжаемости на  $N$  данного  $I$ -расслоения [Sk20, §13.1] над краем  $\partial N$ .

(d) Продолжения  $I$ -расслоения  $\mu$  с границы  $\partial N$  2-многообразия  $N$  взаимно однозначно соответствуют таким элементам  $\nu \in H^1(N)$ , что  $\nu|_{\partial N} = w_1(\mu)$ .

**Теорема 10.6.2.** *Любые два ориентируемых утолщения одного 2-многообразия  $P$  (даже одной ложной поверхности  $P$ ) гомеоморфны (даже неподвижно на  $P$ ).*

Классификация 3-утолщений данного 2-комплекса сходна с классификацией граф-многообразий [Wa67m] и интегрируемых гамильтоновых систем [BFM]. Проблемы существования, единственности и классификации  *$n$ -мерных утолщений* комплекса изучались в [Wa67, LS69] [GT87, Теоремы 3.2.3 и 3.2.2].

Для 2-комплекса  $P$  обозначим через  $T^3(P)$  множество всех его 3-утолщений  $(M, P)$  с точностью до PL гомеоморфности тождественной на  $P$ . Определения групп  $H^1(Q)$ ,  $H^1(Q, Q')$ , отображения сужения

$$r_Q : H^1(Q) \rightarrow H^1(Q')$$

и инварианта Матвеева  $m(Q) \in H^1(Q')$  естественно появляются при изучении утолщаемости, см. §10.5.

**Теорема 10.6.3** ([BRS99], ср. [HMS, I, Theorem 3.1.b]). *Для 3-утолщаемой ложной поверхности  $Q$  имеется биекция  $w_1|_Q : T^3(Q) \rightarrow r_Q^{-1}(m(Q))$ . Если  $Q'$  связно, то имеется биекция  $T^3(Q) \rightarrow H^1(Q, Q')$ .*

## 10.7 Утолщения произвольных 2-комплексов

Для некоторых частных случаев существуют простые критерии утолщаемости [OS74]. Для общего случая вряд ли существует более простой критерий утолщаемости, чем следующий. Его доказательство содержится в [Sk94], [BRS99] и аналогично вышеприведенным рассуждениям для ложных поверхностей.

**Теорема 10.7.1** ([BRS99], ср. [Sk94], [OS74, Theorem 3.2], [La00]). *2-комплекс  $P$  3-утолщаем (ориентируемо 3-утолщаем) тогда и только тогда, когда существует такое подчиненное вложение  $\varepsilon \in E(P)$ , что  $\delta m(\varepsilon) = 0$  ( $m(\varepsilon) = 0$ ).*

Дадим необходимые определения.

*Настоящий 1-остов*  $P'$  полиэдра  $P$  — граф (точнее, 1-полиэдр) в  $P$ , состоящий из точек, не имеющих окрестности, гомеоморфной замкнутому 2-диску. *Настоящий 0-остов*  $P''$  полиэдра  $P$  — конечное множество точек в  $P$ , не имеющих окрестности, гомеоморфной книжке с некоторым числом страниц. Заметим, что  $P''$  является настоящим 0-остовом графа  $P'$  (т.е. конечным множеством точек в  $P'$ , не имеющих окрестности, гомеоморфной отрезку). Для каждой компоненты графа  $P'$ , не содержащей точек из  $P''$  (т.е. являющейся окружностью или отрезком), возьмем произвольную точку на ней. Обозначим через  $\bar{P}''$  объединение  $P''$  с этими точками.<sup>34</sup>

Предположим, что  $\cup_{A \in \bar{P}''} \text{lk } A$  вложимо в  $S^2$ . Рассмотрим набор вложений  $\{g_A : \text{lk } A \rightarrow S^2\}_{A \in \bar{P}''}$ . Возьмем 'невисячее ребро'  $d \subset P'$  (т.е. замыкание компоненты связности множества  $P' - \bar{P}''$ , являющейся открытой в  $P'$ ). Обозначим через  $A, B \in \bar{P}''$  его концы (возможно,  $A = B$ ). Ребро  $d$  пересекает  $\text{lk } A \cup \text{lk } B$  в двух точках (различных даже при  $A = B$ ). Малые окрестности этих точек в  $\text{lk } A$  и в  $\text{lk } B$  являются  $n$ -одами, которые можно отождествить друг с другом 'вдоль ребра  $d$ '. Если для каждого такого  $d$  отображения  $g_A$  и  $g_B$  дают одинаковые или противоположные циклические порядки лучей  $n$ -ода, то набор  $\{g_A\}$  называется *подчиненным*.<sup>35</sup>

Наборы вложений  $\{f_A, g_A : \text{lk } A \rightarrow S^2\}_{A \in \bar{P}''}$  называются *изопозиционными*, если существует такое семейство гомеоморфизмов  $\{h_A : S^2 \rightarrow S^2\}_{A \in \bar{P}''}$ , что  $h_A \circ f_A = g_A$  для любой  $A \in \bar{P}''$ .

Ясно, что изопозиционные наборы одновременно являются подчиненными или нет. Обозначим через  $E(P)$  множество подчиненных наборов с точностью до изопозиции.<sup>36</sup>

Для данного  $\varepsilon \in E(P)$  возьмем его представитель  $\{g_A : \text{lk } A \rightarrow S^2\}_{A \in \bar{P}''}$ . Для каждого «невисячего ребра»  $d$  комплекса  $P$  возьмем циклические порядки (одинаковые или противоположные) из определения подчиненности. Поставим 0 или 1 на  $d$ , если вращения противоположные или одинаковые, соответственно. Обозначим через  $m(\varepsilon) \in H^1(P')$  кохомологический класс построенной расстановки.

Класс  $m(\varepsilon)$  корректно определен. Действительно, пусть два набора вложений изопозиционны посредством семейства гомеоморфизмов  $\{h_A : S^2 \rightarrow S^2\}_{A \in \bar{P}''}$ . Тогда построенные расстановки  $\mu$  отличаются на кограницу расстановки, равной 1 или 0 на вершине  $A$ , если  $h_A$  обращает или сохраняет ориентацию сферы  $S^2$ , соответственно.

**Теорема 10.7.2** ([BRS99]). *Для 3-утолщаемого 2-комплекса  $P$  имеется инъекция*

$$e \times w_1|_P : T^3(P) \rightarrow E(P) \times H^1(P) \quad \text{с образом} \quad \{(\varepsilon, \omega) \in E(P) \times H^1(P) : m(\varepsilon) = \omega|_{P'}\}.$$

Из этой теоремы вытекает наличие биекции  $T^3(P) \rightarrow m^{-1}(\text{im } r_P) \times \ker r_P$ .

Для 3-утолщения  $M$  2-комплекса  $P$  определим

$$e(M) := [\{\text{lk}_P A \rightarrow \text{lk}_M A \cong S^2\}_{A \in \bar{P}''}] \in E(P).$$

Так как окрестность каждого ребра графа  $P'$  вложена в  $M$ , то указанный набор вложений действительно является подчиненным. Эквивалентное утолщение дает изопозиционные наборы вложений, поэтому  $e(M)$  корректно определено.

Равенство  $m(e(M)) = w_1(M)|_{P'}$  доказывается аналогично утверждению 10.5.3.

<sup>34</sup>Теорема 10.6.3 верна для любого такого 2-комплекса  $P$ , что для каждой вершины  $A \in \bar{P}''$  граф  $\text{lk } A$  3-связен [BRS99]. Граф называется *3-связным*, если никакие две его точки не разбивают его на два графа с более, чем одним ребром в каждом.

<sup>35</sup>Это определение отличается от стандартного — то, что обычно называют *подчиненным*, мы называем *ориентированно подчиненным*.

<sup>36</sup>Множество вложений данного графа в плоскость с точностью до изопозиции было описано Уитни для двусвязных графов. Существует простое обобщение этого описания на случай произвольных графов (фольклор, [Sk05]).

## Список литературы

- [ABM+] \* Э. Алкин, Е. Бордачева, А. Мирошников, А. Скопенков, Инварианты почти вложений графов в плоскость, arXiv:2410.09860.
- [Ad18] K. Adiprasito, Combinatorial Lefschetz theorems beyond positivity, arXiv:1812.10454v4.
- [AGL] Mathematical Economics, ed. by A. Ambrosetti, F. Gori, R. Lucchetti, Lect. Notes Math. 1330, Springer, 1986.
- [AKM] M. Abrahamsen, L. Kleist and T. Miltzow. Geometric Embeddability of Complexes is  $\exists\mathbb{R}$ -complete, arXiv:2108.02585.
- [AKS] S. Avvakumov, R. Karasev and A. Skopenkov. Stronger counterexamples to the topological Tverberg conjecture, *Combinatorica*, 43 (2023), 717–727. arXiv:1908.08731.
- [Ak00] \* П. М. Ахметьев. Вложения компактов, стабильные гомотопические группы сфер и теория особенностей, *Успехи Мат. Наук.* 2000. 55:3. С. 3-62.
- [AK21] G. Arone and V. Krushkal. Embedding obstructions in  $\mathbb{R}^d$  from the Goodwillie-Weiss calculus and Whitney disks. arXiv:2101.10995.
- [Al22] E. Alkin, Hardness of almost embedding simplicial complexes in  $\mathbb{R}^d$ , II. arXiv:2206.13486
- [AMS+] S. Avvakumov, I. Mabillard, A. Skopenkov and U. Wagner. Eliminating Higher-Multiplicity Intersections, III. Codimension 2, *Israel J. Math.* 245 (2021) 501–534. arxiv:1511.03501.
- [ARS01] P. Akhmetiev, D. Repovš and A. Skopenkov, Embedding products of low-dimensional manifolds in  $\mathbb{R}^m$ , *Topol. Appl.* 113 (2001), 7–12.
- [ARS02] P. Akhmetiev, D. Repovš and A. Skopenkov. Obstructions to approximating maps of  $n$ -manifolds into  $R^{2n}$  by embeddings, *Topol. Appl.*, 123 (2002), 3–14.
- [Ba23] \* I. Barany. Tverberg’s theorem, a new proof. arXiv:2308.10105.
- [BBZ] \* I. Bárány, P. V. M. Blagojević and G. M. Ziegler. Tverberg’s Theorem at 50: Extensions and Counterexamples, *Notices of the Amer. Math. Soc.*, 63:7 (2016), 732–739.
- [BB79] E. G. Bajmóczy and I. Bárány, On a common generalization of Borsuk’s and Radon’s theorem, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.* 34:3 (1979), 347-350.
- [Bi83] \* R. H. Bing. *The Geometric Topology of 3-Manifolds*. Providence, R. I. 1983. (Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., 40).
- [BE82] \* В. Г. Болтянский и В. А. Ефремович. *Наглядная топология*. М.: Наука, 1982.
- [BFM] \* А. В. Болсинов, С. В. Матвеев, А. Т. Фоменко. Топологическая классификация интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы, *Успехи Мат. Наук.* 45:2 (1990) 49– 77.



- [BFZ14] *P. V. M. Blagojević, F. Frick, and G. M. Ziegler*, Tverberg plus constraints, *Bull. Lond. Math. Soc.* 46:5 (2014), 953–967, arXiv:1401.0690.
- [BFZ] *P. V. M. Blagojević, F. Frick and G. M. Ziegler*, Barycenters of Polytope Skeleta and Counterexamples to the Topological Tverberg Conjecture, via Constraints, *J. Eur. Math. Soc.*, 21:7 (2019) 2107–2116. arXiv:1510.07984.
- [Bi21] *A. I. Bikeev*, Criteria for integer and modulo 2 embeddability of graphs to surfaces, arXiv:2012.12070v2.
- [BL] [https://en.wikipedia.org/wiki/Brunnian\\_link](https://en.wikipedia.org/wiki/Brunnian_link)
- [BL4] Students form a 4-component Brunnian link, <http://www.mccme.ru/circles/oim/foto2014/brunn4.png> (5Mb)
- [BMZ15] *P. V. M. Blagojević, B. Matschke, G. M. Ziegler*, Optimal bounds for the colored Tverberg problem, *J. Eur. Math. Soc.*, 17:4 (2015) 739–754, arXiv:0910.4987.
- [BZ16] \* *P. V. M. Blagojević and G. M. Ziegler*, Beyond the Borsuk-Ulam theorem: The topological Tverberg story, in: *A Journey Through Discrete Mathematics*, Eds. M. Loeb, J. Nešetřil, R. Thomas, Springer, 2017, 273–341. arXiv:1605.07321v3.
- [BM15] *I. Bogdanov and A. Matushkin*. Algebraic proofs of linear versions of the Conway–Gordon–Sachs theorem and the van Kampen–Flores theorem, arXiv:1508.03185.
- [BM04] *Boyer, J. M. and Myrvold, W. J.* On the cutting edge: simplified  $O(n)$  planarity by edge addition, *Journal of Graph Algorithms and Applications*, 8:3 (2004) 241–273.
- [BP97] \* *R. Benedetti and C. Petronio*. Branched standard spines of 3-manifolds, *Lecture Notes in Math.* 1653, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1997.
- [Br72] *J. L. Bryant*. Approximating embeddings of polyhedra in codimension 3, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 170 (1972) 85–95.
- [BRS99] *D. Repovš, N. Brodsky and A. B. Skopenkov*. A classification of 3-thickenings of 2-polyhedra, *Topol. Appl.* 1999. 94. P. 307–314.
- [BSS] *I. Bárány, S. B. Shlosman, and A. Szűcs*, On a topological generalization of a theorem of Tverberg, *J. London Math. Soc. (II. Ser.)* 23 (1981), 158–164.
- [BS17] \* *I. Bárány and P. Soberón*, Tverberg’s theorem is 50 years old: a survey, *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)* 55:4 (2018), 459–492. arXiv:1712.06119.
- [BT98] *B. Bollobás and A. Thomason*, Proof of a conjecture of Mader, Erdős and Hajnal on topological complete subgraphs. *Eur. J. Combin.*, 19(8) (1998), 883–887.
- [CG83] *J. H. Conway and C. M. A. Gordon*, Knots and links in spatial graphs, *J. Graph Theory* 7 (1983), 445–453.
- [CKMS] *M. Čadek, M. Krčál, J. Matoušek, F. Sergeraert, L. Vokřínek, U. Wagner*. Computing all maps into a sphere, *J. of the ACM*, 61:3 (2014). arXiv:1105.6257.
- [CKM+] *M. Čadek, M. Krčál, J. Matoušek, L. Vokřínek, U. Wagner*. Extendability of continuous maps is undecidable, *Discr. and Comp. Geom.* 51 (2014) 24–66. arXiv:1302.2370.

- [CKM12+] *M. Čadek, M. Krčál, J. Matoušek, L. Vokřínek, U. Wagner.* Polynomial-time computation of homotopy groups and Postnikov systems in fixed dimension, *SIAM J. Comput.*, 43:5 (2014), 1728–1780. arXiv:1211.3093.
- [CKS+] \* New ways of weaving baskets, presented by G. Chelnokov, Yu. Kudryashov, A. Skopenkov and A. Sossinsky, <http://www.turgor.ru/lktg/2004/lines.en/index.htm>.
- [CKV] *M. Čadek, M. Krčál, and L. Vokřínek.* Algorithmic solvability of the lifting-extension problem, *Discr. Comp. Geom.* 57 (2017), 915–965. arXiv:1307.6444.
- [CLR] \* *T. Кормен, Ч. Лейзерсон, Р. Ривест.* Алгоритмы: построение и анализ, МЦНМО, Москва, 1999.
- [CR] \* *Р. Курант, Дж. Роббинс,* Что такое математика. М.: МЦНМО, 2004.
- [CRS98] \* *A. Cavicchioli, D. Repovš and A. B. Skopenkov.* Open problems on graphs, arising from geometric topology, *Topol. Appl.* 1998. 84. P. 207-226.
- [CRS] *M. Cencelj, D. Repovš and M. Skopenkov,* Classification of knotted tori in the 2-metastable dimension, *Mat. Sbornik*, 203:11 (2012), 1654–1681. arxiv:math/0811.2745.
- [CS16o] *D. Crowley and A. Skopenkov,* Embeddings of non-simply-connected 4-manifolds in 7-space. II. On the smooth classification, *Proc. A of the Royal Soc. of Edinburgh* 152:1 (2022), 163–181. arXiv:1612.04776.
- [De93] *T.K. Dey.* On counting triangulations in  $d$ -dimensions. *Comput. Geom.* 3:6 (1993) 315–325.
- [DS22] *S. Dzhenzher and A. Skopenkov,* A quadratic estimation for the Kühnel conjecture on embeddings, arXiv:2208.04188.
- [FF89] \* *A. Т. Фоменко и Д. Б. Фукс.* Курс гомотопической топологии. М.: Наука, 1989.
- [FH10] *M. Farber, E. Hanbury.* Topology of Configuration Space of Two Particles on a Graph, II. *Algebr. Geom. Topol.* 10 (2010) 2203–2227. arXiv:1005.2300.
- [FK19] *R. Fulek, J. Kynčl,*  $\mathbb{Z}_2$ -genus of graphs and minimum rank of partial symmetric matrices, 35th Intern. Symp. on Comp. Geom. (SoCG 2019), Article No. 39; pp. 39:1–39:16, <https://drops.dagstuhl.de/opus/volltexte/2019/10443/pdf/LIPIcs-SoCG-2019-39.pdf>. We refer to numbering in arXiv version: arXiv:1903.08637.
- [FKT] *M. H. Freedman, V. S. Krushkal and P. Teichner.* Van Kampen’s embedding obstruction is incomplete for 2-complexes in  $\mathbb{R}^4$ , *Math. Res. Letters.* 1994. 1. P. 167–176.
- [F134] *A. Flores,* Über  $n$ -dimensionale Komplexe die im  $E^{2n+1}$  absolut selbstverschlungen sind, *Ergeb. Math. Koll.* 6 (1934) 4–7.
- [Fo04] \* *R. Fokkink.* A forgotten mathematician, *Eur. Math. Soc. Newsletter* 52 (2004) 9–14.

- [FPS] *R. Fulek, M.J. Pelsmayer and M. Schaefer.* Strong Hanani-Tutte for the Torus, arXiv:2009.01683.
- [Fr78] *M. Freedman,* Quadruple points of 3-manifolds in  $S^4$ , Comment. Math. Helv. 53 (1978), 385-394.
- [FR86] *R. Fenn, D. Rolfsen.* Spheres may link homotopically in 4-space, J. London Math. Soc. 34 (1986) 177-184.
- [Fr15] *F. Frick,* Counterexamples to the topological Tverberg conjecture, Oberwolfach reports, 12:1 (2015), 318–321. arXiv:1502.00947.
- [Fr17] *F. Frick,* On affine tverberg-type results without continuous generalization, arXiv:1702.05466
- [FS20] *F. Frick and P. Soberón,* The topological Tverberg problem beyond prime powers, arXiv:2005.05251.
- [FT77] *R. Fenn, P. Taylor,* Introducing doodles, pp. 37-43 in: Topology of Low-Dimensional Manifolds, Proceedings of the Second Sussex Conference, 1977, Ed. R. Fenn, V. 722 of Lecture Notes in Math.
- [FV21] *M. Filakovský, L. Vokřínek.* Computing homotopy classes for diagrams, Discr. Comp. Geom. 70 (2023), 866–920. arXiv:2104.10152.
- [FWZ] *M. Filakovský, U. Wagner, S. Zhechev.* Embeddability of simplicial complexes is undecidable. Proceedings of the 2020 ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms.
- [Ga23] *T. Garaev,* On drawing  $K_5$  minus an edge in the plane, arXiv:2303.14503.
- [GDI] \* *A.A. Глибичук, А.Б. Дайняк, Д.Г. Ильинский, А.Б. Кунавский, А.М. Райгородский, А.Б. Скопенков, А.А. Чернов,* Элементы дискретной математики в задачах, М, МЦНМО, 2016. Обновляемая версия части книги: <http://www.mccme.ru/circles/oim/discrbook.pdf>
- [GPP+] *X. Goaoc, P. Paták, Z. Patáková, M. Tancer, and U. Wagner.* Bounding Helly numbers via Betti numbers. In 31st International Symposium on Computational Geometry, volume 34 of LIPIcs. Leibniz Int. Proc. Inform., pp. 507-521. Schloss Dagstuhl. Leibniz-Zent. Inform., Wadern, 2015. Full version: arXiv:1310.4613.
- [Gr86] \* *M. Gromov,* Partial Differential Relations, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3), Springer Verlag, Berlin-New York, 1986.
- [Gr10] *M. Gromov,* Singularities, expanders and topology of maps. Part 2: From combinatorics to topology via algebraic isoperimetry, Geometric and Functional Analysis 20 (2010), no. 2, 416–526.
- [GR79] *J. L. Gross and R. H. Rosen,* A linear time planarity algorithm for 2-complexes, Journal of the ACM, 26:4 (1979), 611–617.
- [Gr69] *B. Grünbaum.* Imbeddings of simplicial complexes. Comment. Math. Helv., 44:1, 502–513, 1969.
- [GS06] *D. Goncalves and A. Skopenkov,* Embeddings of homology equivalent manifolds with boundary, Topol. Appl., 153:12 (2006) 2026-2034. arxiv:1207.1326.

- [GS79] *P. M. Gruber and R. Schneider*, Problems in geometric convexity. In *Contributions to geometry (Proc. Geom. Sympos., Siegen, 1978)*, 255–278. Birkhäuser, Basel-Boston, Mass., 1979.
- [GSS+] \* Projections of skew lines, presented by A. Gaifullin, A. Shapovalov, A. Skopenkov and M. Skopenkov, <http://www.turgor.ru/1ktg/2001/index.php>.
- [GT87] \* *J. L. Gross and T. W. Tucker*. Topological graph theory. New York: Wiley-Interscience, 1987.
- [Ha62k] *A. Haefliger*, Knotted  $(4k - 1)$ -spheres in  $6k$ -space, *Ann. of Math.* 75 (1962) 452–466.
- [Ha63] *A. Haefliger*, Plongements différentiables dans le domaine stable, *Comment. Math. Helv.* 36 (1962-63) 155–176.
- [Ha69] *L. S. Harris*, Intersections and embeddings of polyhedra, *Topology* 8 (1969) 1–26.
- [Ha] \* *F. Harary*. Graph theory. Рус. пер.: Ф. Харари. Теория графов. М., Мир, 1973.
- [HC19] \* *C. Herbert Clemens*. Two-Dimensional Geometries. A Problem-Solving Approach, Amer. Math. Soc., 2019.
- [HK98] *N. Habegger and U. Kaiser*, Link homotopy in 2–metastable range, *Topology* 37:1 (1998) 75–94.
- [HMS] \* *C. Hog-Angeloni, W. Metzler and A. J. Sieradski*. Two-dimensional homotopy and combinatorial group theory. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1993. (London Math. Soc. Lecture Notes, 197).
- [HJ64] *R. Halin and H. A. Jung*. Charakterisierung der Komplexe der Ebene und der 2-Sphäre, *Arch. Math.* 1964. 15. P. 466-469.
- [HG] \* [http://www.map.mpim-bonn.mpg.de/Homology\\_groups\\_\(simplicial;\\_simple\\_definition\)](http://www.map.mpim-bonn.mpg.de/Homology_groups_(simplicial;_simple_definition))
- [HT74] *J. Hopcroft and R. E. Tarjan*, Efficient planarity testing, *J. of the Association for Computing Machinery*, 21:4 (1974) 549–568.
- [Is] \* <http://www.map.mpim-bonn.mpg.de/Isotopy>
- [Jo02] *C. M. Johnson*. An obstruction to embedding a simplicial  $n$ -complex into a  $2n$ -manifold, *Topology Appl.* 122:3 (2002) 581–591.
- [JVZ] D. Jojić, S. T. Vrećica, R. T. Živaljević, Topology and combinatorics of 'unavoidable complexes', arXiv:1603.08472v1.
- [Ka] G. Kalai, From Oberwolfach: The Topological Tverberg Conjecture is False, 'Combinatorics and more' blog post, February 6, 2015, [gilkalai.wordpress.com](http://gilkalai.wordpress.com)
- [Kho] *N. Khoroshavkina*. A simple characterization of graphs of cutwidth 2, arXiv:1811.06716.
- [Ko18] \* *E. Колпаков*. Доказательство теоремы Радона при помощи понижения размерности, *Мат. Просвещение*, 23 (2018), arXiv:1903.11055.

- [Ko19] *E. Kogan*. Linking of three triangles in 3-space, arXiv:1908.03865.
- [Ko] *E. Kolpakov*. A ‘converse’ to the Constraint Lemma, arXiv:1903.08910.
- [Ko91] *U. Koschorke*. Link homotopy with many components, *Topology* 30:2 (1991) 267–281.
- [KPS] \* *A. Kaibkhanov, D. Permyakov and A. Skopenkov*. Realization of graphs with rotation, <http://www.turgor.ru/1ktg/2005/3/index.htm>.
- [Kr00] *V. S. Krushkal*. Embedding obstructions and 4-dimensional thickenings of 2-complexes, *Proc. Amer. Math. Soc.* 128:12 (2000) 3683–3691. arXiv:math/0004058.
- [KRR+] \* Towards higher-dimensional combinatorial geometry, presented by E. Kogan, V. Retinskiy, E. Riabov and A. Skopenkov, <https://www.mccme.ru/circles/oim/multicomb.pdf> .
- [KS99] \* *П. Кожевников и А. Скопенков*. Узкие деревья на плоскости, *Мат. Образование*. 1999. 2-3. С. 126-131.
- [KS20] *R. Karasev and A. Skopenkov*. Some ‘converses’ to intrinsic linking theorems, *Discr. Comp. Geom.*, 70:3 (2023), 921–930, arXiv:2008.02523.
- [KS21] \* *E. Kogan and A. Skopenkov*. A short exposition of the Patak-Tancer theorem on non-embeddability of  $k$ -complexes in  $2k$ -manifolds, arXiv:2106.14010.
- [Ku68] \* *К. Куратовский*. Топология. Т. 1, 2. М.: Мир, 1969.
- [La00] *F. Lasheras*. An obstruction to 3-dimensional thickening, *Proc. Amer. Math. Soc.* 2000. 128. P. 893-902.
- [Lo] M. de Longueville. Notes on the topological Tverberg theorem. *Discrete Math.* 247 (2002), no. 1–3, 271–297. (The paper first appeared in *Discrete Math.* 241 (2001) 207–233, but the original version suffered from serious publisher’s typesetting errors.)
- [Lo13] *M. de Longueville*. A course in topological combinatorics. Universitext. Springer, New York (2013).
- [LS69] *W. B. R. Lickorish and L. C. Siebenmann*. Regular neighborhoods and the stable range, *Trans. Amer. Math. Soc.* 1969. 139. P. 207-230.
- [LZ] \* *S. Lando and A. Zvonkin*. *Embedded Graphs*. Springer.
- [Ma68] *W. Mader*, Homomorphiesätze für Graphen. *Math. Ann.*, 178(2) (1968), 154–168.
- [Ma73] *С. В. Матвеев*. Специальные остовы кусочно-линейных многообразий, *Мат. Сборник*. 1973. 92. С. 282-293.
- [Ma97] *Yu. Makarychev*. A short proof of Kuratowski’s graph planarity criterion, *J. of Graph Theory*, 25 (1997), 129–131.
- [Ma03] \* *J. Matoušek*. *Using the Borsuk-Ulam theorem: Lectures on topological methods in combinatorics and geometry*. Springer Verlag, 2008.

- [Ma05] *V. Manturov*. A proof of the Vasiliev conjecture on the planarity of singular links, *Izv. RAN* 2005.
- [Ma78] *Y Matsumoto*, Secondary intersectional properties of 4-manifolds and Whitney's trick, *Proceedings of Symposia in Pure mathematics Vol. 32 Part 2 (1978)* 99–107.
- [Mat97] *J. Matoušek*. A Helly-type theorem for unions of convex sets. *Discr. Comp. Geom.*, 18:1 (1997) 1-12.
- [Me29] *K. Menger*. Über plättbare Dreiergraphen und Potenzen nicht plättbarer Graphen, *Ergebnisse Math. Kolloq.*, 2 (1929) 30–31.
- [Me04] *S. Melikhov*. Sphere eversions and realization of mappings, *Trudy MIAN* 247 (2004) 159-181 (in Russian) arXiv:math.GT/0305158.
- [Me06] *S. A. Melikhov*, The van Kampen obstruction and its relatives, *Proc. Steklov Inst. Math* 266 (2009), 142-176 (= *Trudy MIAN* 266 (2009), 149-183), arXiv:math/0612082.
- [Me17] *S. Melikhov*, Gauss type formulas for link map invariants, arXiv:1711.03530.
- [Me18] *S. A. Melikhov*, A triple-point Whitney trick, *J. Topol. Anal.*, 2018, 1–6. arXiv:2210.04016.
- [Me22] *S. A. Melikhov*, Embeddability of joins and products of polyhedra, *Topol. Methods in Nonlinear Analysis*, 60:1 (2022), 185-201. arXiv:2210.04015.
- [Mi54] *J. Milnor*, Link groups, *Ann. of Math.* 59 (1954), 177–195.
- [Mi97] *P. Minc*. Embedding simplicial arcs into the plane, *Topol. Proc.* 1997. 22. 305–340.
- [MNS] \* *A. Мирошников, О. Никитенко и А. Скопенков*. Циклы в графах и в гиперграфах: в направлении теории гомологий, arXiv:2406.16705.
- [Mo77] \* *E. E. Moise*. *Geometric Topology in Dimensions 2 and 3 (GTM)*, Springer-Verlag, 1977.
- [MRS+] *A. de Mesmay, Y. Rieck, E. Sedgwick, M. Tancer*, Embeddability in  $\mathbb{R}^3$  is NP-hard. arXiv:1708.07734.
- [MS06] *S.A. Melikhov, E.V. Shchepin*, The telescope approach to embeddability of compacta. arXiv:math.GT/0612085.
- [MST+] *J. Matoušek, E. Sedgwick, M. Tancer, U. Wagner*, Embeddability in the 3-sphere is decidable, *Journal of the ACM* 65:1 (2018) 1–49, arXiv:1402.0815.
- [Mo08] *T. Moriyama*. An invariant of embeddings of 3-manifolds in 6-manifolds and Milnor's triple linking number, *J. Math. Sci. Univ. Tokyo*, 18 (2011), 193–237. arXiv:0806.3733.
- [MT01] \* *B. Mohar and C. Thomassen*. *Graphs on Surfaces*. The John Hopkins University Press, 2001.
- [MTW10] *J. Matoušek, M. Tancer, U. Wagner*. A geometric proof of the colored Tverberg theorem, *Discr. and Comp. Geometry*, 47:2 (2012), 245–265. arXiv:1008.5275.

- [MTW] *J. Matoušek, M. Tancer, U. Wagner.* Hardness of embedding simplicial complexes in  $\mathbb{R}^d$ , *J. Eur. Math. Soc.* 13:2 (2011), 259–295. arXiv:0807.0336.
- [MW14] *I. Mabillard and U. Wagner.* Eliminating Tverberg Points, I. An Analogue of the Whitney Trick, *Proc. of the 30th Annual Symp. on Comp. Geom. (SoCG'14)*, ACM, New York, 2014, pp. 171–180.
- [MW15] *I. Mabillard and U. Wagner.* Eliminating Higher-Multiplicity Intersections, I. A Whitney Trick for Tverberg-Type Problems. arXiv:1508.02349.
- [MW16] *I. Mabillard and U. Wagner.* Eliminating Higher-Multiplicity Intersections, II. The Deleted Product Criterion in the  $r$ -Metastable Range. arXiv:1601.00876v2.
- [Ne91] *S. Negami.* Ramsey theorems for knots, links and spatial graphs, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 324 (1991), 527–541.
- [Ni00] *R. Nikkuni.* The second skew-symmetric cohomology group and spatial embeddings of graphs, *J. Knot Theory Ram.* 9 (2000), 387–411.
- [No76] \* *С. П. Новиков.* Топология-1. М.: Наука, 1976. (Итоги науки и техники. ВИНТИ. Современные проблемы математики. Основные направления, 12).
- [OC] Olympiad in combinatorics (in Russian), Moscow Inst. of Physics and Technology, 2018, <https://mipt.ru/upload/medialibrary/187/zadachi.pdf>
- [ORS] *A. Onischenko, D. Repovš and A. Skopenkov.* Resolutions of 2-polyhedra by fake surfaces and embeddings into  $\mathbb{R}^4$ , *Contemp. Math.* 288 (2001) 396–400.
- [OS74] *R. P. Osborne and R. S. Stevens.* Group presentations corresponding to spines of 3-manifolds, I, *Amer. J. Math.* 1974. 96. P. 454-471; II, *Amer. J. Math.* 1977. 234. P. 213-243; III, *Amer. J. Math.* 1977. 234 P. 245-251.
- [Oz] *M. Özaydin,* Equivariant maps for the symmetric group, unpublished, <http://minds.wisconsin.edu/handle/1793/63829>.
- [Pa] \* *I. Pak,* Lectures on Discrete and Polyhedral Geometry, <http://www.math.ucla.edu/~pak/geomp018.pdf>.
- [Pa21] *S. Parsa,* Instability of the Smith index under joins and applications to embeddability, *Trans. Amer. Math. Soc.* 375 (2022), 7149–7185, arXiv:2103.02563.
- [Pa20] *S. Parsa,* On the Smith classes, the van Kampen obstruction and embeddability of  $[3] * K$ , arXiv:2001.06478.
- [Pe72] \* *B. B. Peterson.* The Geometry of Radon's Theorem, *Amer. Math. Monthly* 79 (1972), 949-963.
- [Pe08] *Д. Пермяков.* Классификация погружений графов в плоскость, *Вестник МГУ, сер.1*, 2008, N5, 55-56.
- [Pe16] *Д. Пермяков.* Матем. сб., 207:6 (2016), 93–112.
- [Pr95] \* *В. В. Прасолов.* Наглядная топология. М.: МЦНМО, 1995.
- [Pr04] \* *В. В. Прасолов.* Элементы комбинаторной и дифференциальной топологии. М.: МЦНМО, 2004. <http://www.mcsme.ru/prasolov>.

- [PS96] \* *V. V. Prasolov, A. B. Sossinsky* Knots, Links, Braids, and 3-manifolds. Amer. Math. Soc. Publ., Providence, R.I., 1996.
- [PS05] \* *В. В. Прасолов и М. Б. Скопенков.* Рамсеевская теория зацеплений, Мат. Просвещение. 2005. 9. С. 108–115.
- [PS11] *Y. Ponty and C. Saule.* A combinatorial framework for designing (pseudoknotted) RNA algorithms, Proc. of the 11th Intern. Workshop on Algorithms in Bioinformatics, WABI'11, 250–269.
- [PS20] *S. Parsa and A. Skopenkov.* On embeddability of joins and their ‘factors’, Topol. Appl., 326 (2023) 108409, arXiv:2003.12285.
- [PW] *I. Pak, S. Wilson,* Geometric realizations of polyhedral complexes, <http://www.math.ucla.edu/~pak/papers/Fary-full131.pdf>.
- [RN11] \* *R. L. Ricca, B. Nipoti.* Gauss’ linking number revisited. J. of Knot Theory and Its Ramif. 20:10 (2011) 1325–1343. <https://www.maths.ed.ac.uk/~v1ranick/papers/ricca.pdf>.
- [RRS] \* *V. Retinskiy, A. Ryabichev and A. Skopenkov.* Motivated exposition of the proof of the Tverberg Theorem (in Russian). Mat. Prosveschenie, 27 (2021), 166–169. arXiv:2008.08361.
- [RS72] \* *К. П. Пурк и Б. Дж. Сандерсон.* Введение в кусочно-линейную топологию, Москва. Мир. 1974.
- [RS96] \* *D. Repovš and A. B. Skopenkov.* Embeddability and isotopy of polyhedra in Euclidean spaces, Proc. of the Steklov Inst. Math. 1996. 212. P. 173–188.
- [RS01] *D. Repovš and A. Skopenkov.* On contractible  $n$ -dimensional compacta, non-embeddable into  $\mathbb{R}^{2n}$ , Proc. Amer. Math. Soc. 129 (2001) 627–628.
- [RS98] *D. Repovš and A. B. Skopenkov.* A deleted product criterion for approximability of a map by embeddings, Topol. Appl. 1998. 87 P. 1–19.
- [RS99] \* *D. Repovš and A. B. Skopenkov.* New results on embeddings of polyhedra and manifolds into Euclidean spaces, Russ. Math. Surv. 54:6 (1999), 1149–1196.
- [RS99’] \* *Д. Реповш и А. Скопенков.* Кольца Борромео и препятствия к вложимости, Труды МИРАН. 1999. 225. С. 331–338.
- [RS00] *D. Repovš and A. Skopenkov.* Cell-like resolutions of polyhedra by special ones, Colloq. Math. 2000. 86:2. P. 231–237.
- [RSS] *D. Repovš, A. B. Skopenkov and E. V. Ščepin.* On uncountable collections of continua and their span, Colloq. Math. 1995. 69:2. P. 289–296.
- [RSS’] *D. Repovš, A. B. Skopenkov and E. V. Ščepin.* On embeddability of  $X \times I$  into Euclidean space, Houston J. Math. 1995. 21. P. 199–204.
- [RWZ+] *Y. Ren, C. Wen, S. Zhen, N. Lei, F. Luo, D.X. Gu,* Characteristic class of isotopy for surfaces, J. Syst. Sci. Complex. 33 (2020) 2139–2156.



- [Sa81] *H. Sachs*. On spatial representation of finite graphs, in: Finite and infinite sets (Eger, 1981), 649–662, Colloq. Math. Soc. Janos Bolyai, 37, North-Holland, Amsterdam, 1984.
- [Sa91] *K. S. Sarkaria*. A one-dimensional Whitney trick and Kuratowski’s graph planarity criterion, Israel J. Math. 73 (1991), 79–89.
- [Sa91g] *K. S. Sarkaria*. A generalized Van Kampen-Flores theorem, Proc. Amer. Math. Soc. 111 (1991), 559–565.
- [Sc04] *T. Schöneborn*. On the Topological Tverberg Theorem, arXiv:math/0405393.
- [Sc84] *E. V. Ščepin*. Soft mappings of manifolds, Russian Math. Surveys, 39:5 (1984).
- [Sc13] \* *M. Schaefer*. Hanani-Tutte and related results. In Geometry — intuitive, discrete, and convex, Bolyai Soc. Math. Stud., 24 (2013), 259–299. <http://ovid.cs.depaul.edu/documents/htsurvey.pdf>
- [Sh57] *A. Shapiro*, Obstructions to the embedding of a complex in a Euclidean space, I, The first obstruction, Ann. Math. 66 (1957), 256–269.
- [Sh18] \* *S. Shlosman*, Topological Tverberg Theorem: the proofs and the counterexamples, Russian Math. Surveys, 73:2 (2018), 175–182. arXiv:1804.03120.
- [Si69] *K. Sieklucki*. Realization of mappings, Fund. Math. 1969. 65. P. 325-343.
- [Sk94] *A. Скопенков*. Геометрическое доказательство теоремы Нойвирта об утолщаемости 2-мерных полиэдров, Math. Notes. 1995. 58:5. P. 1244-1247.
- [Sk98] *A. B. Skopenkov*. On the deleted product criterion for embeddability in  $\mathbb{R}^m$ , Proc. Amer. Math. Soc., 126:8 (1998), 2467-2476.
- [Sk00] *A. Skopenkov*, On the generalized Massey–Rolfen invariant for link maps, Fund. Math. 165 (2000), 1–15.
- [Sk02] *A. Skopenkov*, On the Haefliger-Hirsch-Wu invariants for embeddings and immersions, Comment. Math. Helv. 77 (2002), 78–124.
- [Sk03] *M. Skopenkov*, Embedding products of graphs into Euclidean spaces, Fund. Math. 179 (2003), 191–198, arXiv:0808.1199.
- [Sk03’] *M. Skopenkov*, On approximability by embeddings of cycles in the plane, Topol. Appl. 134 (2003), 1–22, arXiv:0808.1187.
- [Sk05] \* *A. Skopenkov*, On the Kuratowski graph planarity criterion, Mat. Prosveschenie, 9 (2005), 116-128. arXiv:0802.3820.
- [Sk05i] *A. Skopenkov*, A new invariant and parametric connected sum of embeddings, Fund. Math. 197 (2007) 253–269. arxiv:math/0509621.
- [Sk06] \* *A. Skopenkov*, Embedding and knotting of manifolds in Euclidean spaces, London Math. Soc. Lect. Notes, 347 (2008) 248–342. arXiv:math/0604045.
- [Sk10] \* *A. Скопенков*, Вложения в плоскость графов с вершинами степени 4, Мат. просвещение, 21 (2017), arXiv:1008.4940.

- [Sk14] \* *A. Skopenkov*, Реализуемость гиперграфов и неотъемлемая зацепленность, *Mat. просвещение*, 32 (2024), 125–159. arXiv:1402.0658.
- [Sk16] \* *A. Skopenkov*, A user’s guide to the topological Tverberg Conjecture, arXiv:1605.05141v5. Abridged earlier published version: *Russian Math. Surveys*, 73:2 (2018), 323–353.
- [Sk16’] \* *A. Skopenkov*, Stability of intersections of graphs in the plane and the van Kampen obstruction, *Topol. Appl.* 240(2018) 259–269, arXiv:1609.03727.
- [Sk16c] \* *A. Skopenkov*, Embeddings in Euclidean space: an introduction to their classification, to appear in *Boll. Man. Atl.* [http://www.map.mpg.de/Embeddings\\_in\\_Euclidean\\_space:\\_an\\_introduction\\_to\\_their\\_classification](http://www.map.mpg.de/Embeddings_in_Euclidean_space:_an_introduction_to_their_classification)
- [Sk16h] \* *A. Skopenkov*, High codimension links, to appear in *Boll. Man. Atl.* [http://www.map.mpg.de/High\\_codimension\\_links](http://www.map.mpg.de/High_codimension_links).
- [Sk16f] \* *A. Skopenkov*, 4-manifolds in 7-space, to appear in *Boll. Man. Atl.* [http://www.map.mpg.de/4-manifolds\\_in\\_7-space](http://www.map.mpg.de/4-manifolds_in_7-space).
- [Sk16s] \* *A. Skopenkov*, Knots, i.e. embeddings of spheres, [http://www.map.mpg.de/Knots,\\_i.e.\\_embeddings\\_of\\_spheres](http://www.map.mpg.de/Knots,_i.e._embeddings_of_spheres).
- [Sk17] *A. Skopenkov*, Eliminating higher-multiplicity intersections in the metastable dimension range. arXiv:1704.00143.
- [Sk17v] \* *A. Skopenkov*, On van Kampen-Flores, Conway-Gordon-Sachs and Radon theorems, arXiv:1704.00300.
- [Sk17o] *A. Skopenkov*, On the metastable Mabillard-Wagner conjecture. arXiv:1702.04259.
- [Sk18] \* *A. Skopenkov*. Invariants of graph drawings in the plane. *Arnold Math. J.*, 6 (2020) 21–55; full version: arXiv:1805.10237.
- [Sk18o] \* *A. Skopenkov*. A short exposition of S. Parsa’s theorems on intrinsic linking and non-realizability. *Discr. Comp. Geom.* 65:2 (2021), 584–585; full version: arXiv:1808.08363.
- [Sk20] \* *A. Skopenkov*, Algebraic Topology From Geometric Standpoint (in Russian), MCCME, Moscow, 2020 (2nd edition). Update of a part: <http://www.mccme.ru/circles/oim/obstruct.pdf> . Part of the English translation: <https://www.mccme.ru/circles/oim/obstructeng.pdf>.
- [Sk20u] \* *A. Skopenkov*. A user’s guide to basic knot and link theory, in: *Topology, Geometry, and Dynamics, Contemporary Mathematics*, vol. 772, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2021, pp. 281–309. Russian version: *Mat. Prosveschenie* 27 (2021), 128–165. arXiv:2001.01472.
- [Sk21d] \* *A. Skopenkov*. On different reliability standards in current mathematical research, arXiv:2101.03745. More often updated version: [https://www.mccme.ru/circles/oim/rese\\_inte.pdf](https://www.mccme.ru/circles/oim/rese_inte.pdf).
- [Sk20e] \* *A. Skopenkov*. Extendability of simplicial maps is undecidable, *Discr. Comp. Geom.*, 69:1 (2023), 250–259, arXiv:2008.00492.

- [Skw] \* *A. Skopenkov*. Whitney trick for eliminating multiple intersections, slides for talks at St Petersburg, Brno, Kiev, Moscow, [https://www.mccme.ru/circles/oim/eliminat\\_talk.pdf](https://www.mccme.ru/circles/oim/eliminat_talk.pdf).
- [Sk23] *A. Skopenkov*. To S. Parsa's theorem on embeddability of joins, arXiv:2302.11537.
- [SS83] *E. B. Щепин, M. A. Штанько*. Спектральный критерий вложимости компактов в евклидовы пространства, Труды Ленинградской Международной Топологической конференции. Л.: Наука, 1983. С. 135-142.
- [SS92] *J. Segal and S. Spież*. Quasi embeddings and embeddings of polyhedra in  $\mathbb{R}^m$ , Topol. Appl., 45 (1992) 275–282.
- [SS03] *F. W. Simmons and F. E. Su*. Consensus-halving via theorems of Borsuk-Ulam and Tucker, Math. Social Sciences 45 (2003) 15–25. <https://www.math.hmc.edu/~su/papers.dir/tucker.pdf>.
- [SS13] *M. Schaefer and D. Štefankovič*. Block additivity of  $\mathbb{Z}_2$ -embeddings. In Graph drawing, volume 8242 of Lecture Notes in Comput. Sci., 185–195. Springer, Cham, 2013. <http://ovid.cs.depaul.edu/documents/genus.pdf>
- [SST95] *R. S. Simon, S. Spież and H. Toruńczyk*. The existence of equilibria in certain games, separation for families of convex functions and a theorem of borsuk-ulam type, Israel J. Math 92 (1995) 1–21.
- [SST02] *R. S. Simon, S. Spież and H. Toruńczyk*. Equilibrium existence and topology in some repeated games with incomplete information, Trans. Amer. Math. Soc. 354:12 (2002) 5005-5026.
- [SSS] *J. Segal, A. Skopenkov and S. Spież*. Embeddings of polyhedra in  $\mathbb{R}^m$  and the deleted product obstruction, Topol. Appl., 85 (1998), 225-234.
- [ST03] *R. Shinjo, K. Taniyama*, Homology classification of spatial graphs by linking numbers and Simon invariants, Topol. Appl. 134 (2003), 53–67.
- [ST07] \* *А. Скопенков и А. Телишев*. И вновь о критерии Куратовского планарности графов, Мат. Просвещение, 11 (2007), 159–160.
- [ST17] *A. Skopenkov and M. Tancer*, Hardness of almost embedding simplicial complexes in  $\mathbb{R}^d$ , Discr. Comp. Geom., 61:2 (2019), 452–463. arXiv:1703.06305.
- [St24] *M. Starkov*, An example of an ‘unlinked’ set of  $2k + 3$  points in  $2k$ -space, arXiv:2402.09002.
- [Su] \* *Д. Судзуки*. Основы дзэн-буддизма. Наука дзэн — ум дзэн. Киев: Преса України. 1992.
- [SZ05] *T. Schöneborn and G. Ziegler*, The Topological Tverberg Theorem and Winding Numbers, J. Comb. Theory, Ser. A, 112:1 (2005) 82–104, arXiv:math/0409081.
- [Sz91] *A. Szücs*, On the cobordism groups of immersions and embeddings, Math. Proc. Camb. Phil. Soc., 109 (1991) 343–349.
- [Ta] \* Handbook of Graph Drawing and Visualization. ed. by R. Tamassia, CRC Press, 2016.

- [Ta95] *K. Taniyama*, Homology classification of spatial embeddings of a graph, *Topol. Appl.* 65 (1995) 205–228.
- [To11] *Tonkonog D.* Embedding 3-manifolds with boundary into closed 3-manifolds, *Topol. Appl.* 158 (2011), 1157–1162. arXiv:1003.3029.
- [Th81] \* *C. Thomassen*, Kuratowski's theorem, *J. Graph. Theory* 5 (1981), 225–242.
- [Um78] *B. Ummel*. The product of nonplanar complexes does not imbed in 4-space, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 242 (1978) 319–328.
- [Val] \* <https://en.wikipedia.org/wiki/Valknut>
- [Vi02] \* *Э. Б. Винберг*. Курс алгебры. Москва. Факториал Пресс. 2002.
- [vK32] *E. R. van Kampen*, Komplexe in euklidischen Räumen, *Abh. Math. Sem. Hamburg*, 9 (1933) 72–78; Berichtigung dazu, 152–153.
- [vK41] *E. R. van Kampen*, Remark on the address of S. S. Cairns, in *Lectures in Topology*, 311–313, University of Michigan Press, Ann Arbor, MI, 1941.
- [Vi] \* *O. Viro*. Some integral calculus based on Euler characteristic, *Lect. Notes in Math.* 1346.
- [Vo96] *A. Yu. Volovikov*, On a topological generalization of the Tverberg theorem. *Math. Notes* 59:3 (1996), 324–326.
- [Vo96v] *A. Yu. Volovikov*, On the van Kampen-Flores Theorem. *Math. Notes* 59:5 (1996), 477–481.
- [VZ93] *A. Vučić and R. T. Živaljević*, Note on a conjecture of Sierksma, *Discr. Comput. Geom.* 9 (1993), 339–349.
- [VZ09] *S. T. Vrećica and R. T. Živaljević*, Chessboard complexes indomitable, *J. of Comb. Theory, Ser. A* 118:7 (2011), 2157–2166. arXiv:0911.3512.
- [Wa67] *C. T. C. Wall*. Classification problems in differential topology, IV, Thickenings, *Topology* 1966. 5. P. 73–94.
- [Wa67m] *F. Waldhausen*. Eine Klasse von 3-dimensional Mannigfaltigkeiten, I. *Invent. Math.* 1967. 3. P. 308–333.
- [We67] *C. Weber*. Plongements de polyèdres dans le domain metastable, *Comment. Math. Helv.* 42 (1967), 1–27.
- [Wn] \* [https://en.wikipedia.org/wiki/Winding\\_number](https://en.wikipedia.org/wiki/Winding_number)
- [Wr77] *P. Wright*. Covering 2-dimensional polyhedra by 3-manifolds spines. *Topology.* 16 (1977), 435–439.
- [Wu58] *W. T. Wu*. On the realization of complexes in a euclidean space (in Chinese): I, *Sci Sinica*, 7 (1958) 251–297; II, *Sci Sinica*, 7 (1958) 365–387; III, *Sci Sinica*, 8 (1959) 133–150.
- [Wu65] \* *W. T. Wu*. A Theory of Embedding, Immersion and Isotopy of Polytopes in an Euclidean Space. Peking: Science Press, 1965.

- [Ya99] *Z. Yang*. Computing Equilibria and Fixed Points: The Solution of Nonlinear Inequalities, Kluwer, Springer Science + Business Media, 1990.
- [Ze60] *E. C. Zeeman*, Unknotting spheres in five dimensions, Bull. Amer. Math. Soc. 66 (1960) 198.  
<https://www.ams.org/journals/bull/1960-66-03/S0002-9904-1960-10431-4/S0002-9904-1960-10431-4.pdf>
- [Ze] \* *E. C. Zeeman*, A Brief History of Topology, UC Berkeley, October 27, 1993, On the occasion of Moe Hirsch's 60th birthday, <http://zakuski.utsa.edu/~gokhman/ecz/hirsch60.pdf>.
- [Zi13] *A. Zimin*. Alternative proofs of the Conway-Gordon-Sachs Theorems, arXiv:1311.2882.
- [Zi11] \* *G. M. Ziegler*,  $3N$  Colored Points in a Plane, Notices of the Amer. Math. Soc., 58:4 (2011), 550-557.
- [ZSS] \* Элементы математики в задачах: через олимпиады и кружки к профессии. Сборник под редакцией А. Заславского, А. Скопенкова и М. Скопенкова. М.: МЦНМО, 2018. Обновляемая версия части книги: <http://www.mcsme.ru/circles/oim/materials/sturm.pdf>.
- [Zu] *J. Zung*. A non-general-position Parity Lemma, <http://www.turgor.ru/lktg/2013/1/parity.pdf>.

**В этом списке звездочками отмечены книги, обзоры и популярные статьи.**