Гомотопическая классификация замкнутых ломаных

Э. Алкин, О. Никитенко и А. Скопенков;
представляется ими и Ю. Хроминым *

Содержание

1 Введение

Мы излагаем (в виде последовательности задач) базовые случаи некоторых фундаментальных идей и методов математики (гомотопии, степени, фундаментальной группы, накрытия, инварианта Уайтхеда и т.д.). Это делается на основе элементарного примера: замкнутые ломаные в подмножестве плоскости. Хотя эти идеи и методы являются частью топологии, они используются во многих других областях, включая информатику [DDM+]. Задачи есть как очень простые (1.1), так и очень сложные (1.7).

Ориентированной циклической последовательностью называется упорядоченный набор с точностью до циклического сдвига. **Замкнутой** ориентированной **ломаной** называется ориентированная циклическая последовательность точек плоскости (не обязательно различных). Далее слово «ориентированная» пропускается.[1]

*Э. Алкин, А. Скопенков: Московский Физико-Технический Институт. О. Никитенко: Алтайский технический университет (Барнаул). А. Скопенков: Независимый Московский Университет, `https://users.mccme.ru/skopenko`. Ю. Хромин: Физико-математическая школа N 146 (Пермь). Благодарим А. Мирошникова за полезные обсуждения и подготовку некоторых рисунков.

[1]Таким образом, замкнутая ломаная (определенная здесь) не является подмножеством плоскости. Тем не менее, иногда мы работаем с замкнутой ломаной $A_1 \dots A_m$ как с объединением отрезков A_iA_{i+1}, например, мы пишем «ломаная, не проходящая через точку».

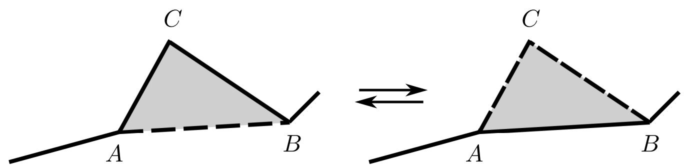

Рис. 1.1: Элементарное сокращение

Пусть N — подмножество плоскости. Неформально говоря, две замкнутые ломаные в N называются *гомотопными*, если одна может быть преобразована в другую «непрерывной деформацией» в N. Вот строгое определение. *Элементарным сокращением* в N замкнутой ломаной в N называется удаление такой ее вершины B, что для соседних с B вершин A, C (которые не обязательно различны) выпуклая оболочка вершин A, B, C *содержится в* N (см. рисунок 1.1). **Гомотопией в** N (кусочно-линейной) называется конечная последовательность замкнутых ломаных, для любых двух последовательных ломаных которой одна получена из другой элементарным сокращением в N. Две замкнутые ломаные называются (кусочно-линейно) **гомотопными в** N, если существует гомотопия в N, первая и последняя ломаные в которой совпадают с заданными.

Далее, когда мы пишем о ломаной в некотором подмножестве плоскости, мы рассматриваем гомотопность (и элементарные сокращения) в том же подмножестве.

Задача 1.1. (b) Любые две одноточечные замкнутые ломаные на плоскости без точки гомотопны.

Решение. Пусть даны точки A и B. Возьмем точку C, не лежащую ни на одной из прямых, соединяющих A и B с выколотой точкой. Тогда нужная гомотопия — A, AC, C, CB, B.

Вопрос о классификации замкнутых ломаных на плоскости с точностью до гомотопии тривиален.

Задача 1.1. (a) Любые две замкнутые ломаные на плоскости гомотопны.

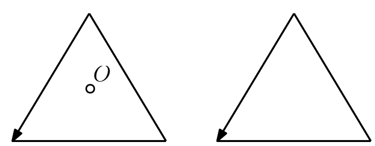

Рис. 1.2: Две замкнутые ломаные на плоскости без точки O

Задача 1.2. Существуют негомотопные замкнутые ломаные на плоскости без точки.

См., например, рисунок 1.2. Попробуйте придумать инварианты, которые различают замкнутые ломаные в задачах 1.2–1.5 и 1.7 (в частности, на рисунках 1.2–1.6). Определение инвариантов и их свойства составляют теорию, представленную в §§3–7 Эта теория нужна также для Теоремы 1.6.

Задача 1.3. Четыре замкнутые ломаные на рисунке 1.3, попарно не гомотопны на плоскости без двух точек.

Задача 1.4 (парадокс Пуанкаре). (a) Как на двух гвоздях, вбитых в плоскую стену, подвесить замкнутую веревку (с тяжелой медалью), чтобы веревка не падала, но после вынимания любого гвоздя падала?

Более строго, приведите пример двух точек P, Q и замкнутой ломаной в $\mathbb{R}^2 - P - Q$, гомотопной одноточечной ломаной в $\mathbb{R}^2 - P$ и в $\mathbb{R}^2 - Q$, но не в $\mathbb{R}^2 - P - Q$.

(b) То же с заменой двух гвоздей на три.

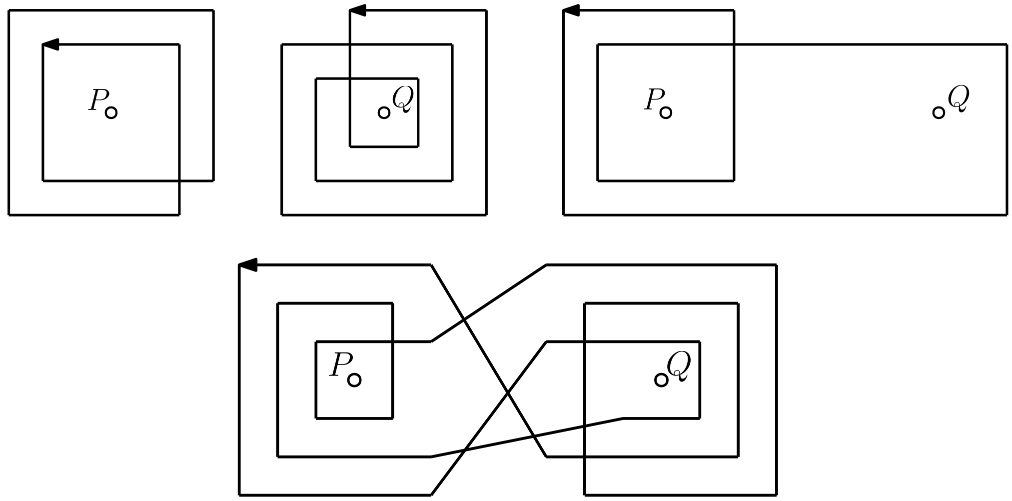

Рис. 1.3: Четыре замкнутые ломаные на плоскости без двух точек P, Q

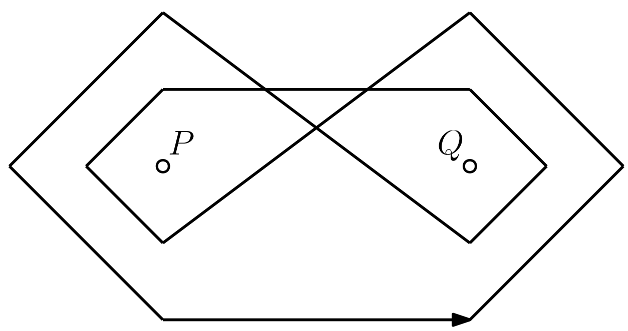

Рис. 1.4: Пример замкнутой ломаной на плоскости без двух точек P, Q к задаче 1.4.a

Эти примеры (и пример к 1.7.a) можно сначала приводить без доказательства их свойств. См. наглядную интерпретацию в [Zi10], [DDM+].

Задача 1.5. * Замкнутые ломаные на рисунке 1.6 не гомотопны на плоскости без трех точек.

Изучая настоящий текст, читатель освоит полезные и важные идеи и методы. Они полезны и важны, поскольку дают следующий яркий результат, формулировка которого доступна неспециалисту (и многие другие результаты, см. учебники по топологии, например, [Sk20]).

Теорема 1.6. *Для любого n существует алгоритм распознавания гомотопности замкнутых ломаных на плоскости без n точек.*

Это конечная точка основных результатов по гомотопической классификации на плоскости без n точек (мы начинаем с $n = 1, 2$, см. утверждения 4.2, 7.6 и задачу 7.8).

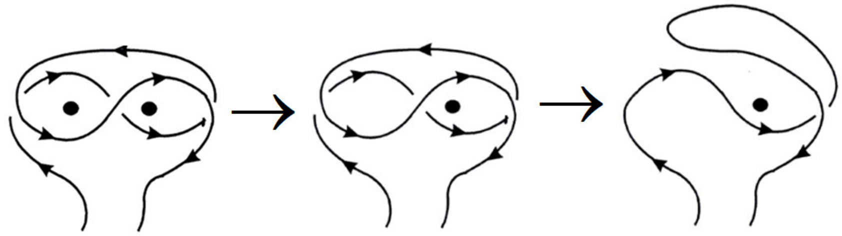

Рис. 1.5: После вынимания любого из гвоздей веревка падает

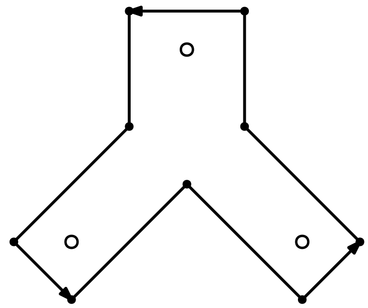 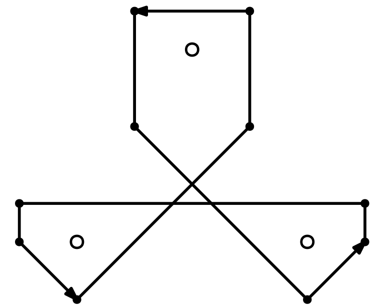

Рис. 1.6: Две замкнутые ломаные на плоскости без трех точек

Решая задачи, Вы увидите, как гомотопическая классификация связана с *комбинаторикой слов*. Естественно появится групповая структура, хотя и на несколько ином множестве *отмеченных* замкнутых ломаных с точностью до *отмеченной* гомотопности. Это проливает свет на связь представленной классификации с *комбинаторной теорией групп*. Благодаря этой связи топологические методы могут быть использованы в теории групп. Это отправная точка *геометрической теории групп* [GG].

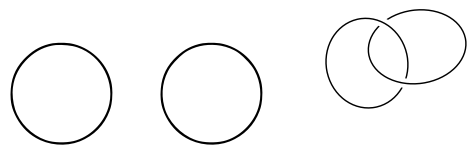

Рис. 1.7: Незацепленные и зацепленные кольца

Задача 1.7 (загадка)**.** * В трехмерном пространстве даны два
(a) незацепленных; (b) зацепленных
кольца, как показано на рисунке 1.7. Можно ли намотать и замкнуть веревку так, чтобы замкнутую веревку нельзя было оттащить далеко от двух колец, но можно было бы оттащить далеко от одного кольца, разрезав другое кольцо?

2 О стиле этого текста

Основные идеи представлены на «олимпиадных» примерах: на простейших частных случаях, свободных от технических деталей, и со сведением к необходимому минимуму научного языка. За счет этого и текст становится доступным для начинающих, и удается быстро добраться до интересных сложных и важных результатов, методов и теоретических идей.

Таким образом, многие из приведенных идей работают для более общих случаев. Мы не тратим время читателя на несложные обобщения. Их легко придумать или найти в литературе. Трудно именно *применить* общую теорию для ярких результатов, сформулированных вне этой теории, когда неизвестно заранее, какую теорию нужно применять (и вообще, можно ли хоть какую-то теорию применить).

Более простой материал приводится, чтобы сделать естественным и доступным более сложный. Попытка начинать с более простого (например, с частных случаев) повышает самостоятельность — а, значит, глубину и надежность — освоения материала. Проще самому доказать частный случай, самому продумать переход от частного к общему, чем самому сразу доказать общий случай. Самостоятельно придуманное надежнее запоминается и легче модифицируется. Кроме того, обычно на частном случае проще отловить и исправить ошибки. Подробнее см. [ZSS, §11.2].

Как правило, мы приводим *формулировку* красивого или важного утверждения *перед* последовательностью определений и результатов, составляющих его *доказательство.* В таких случаях для доказательства утверждения требуется часть дальнейшего материала. Об этом указано после формулировки утверждения. Если к утверждению (или задаче) не приведено ни доказательство, ни ссылка на него, то оно несложно. Основные результаты называются «теоремами», менее важные результаты — «утверждениями», важные вспомогательные результаты — «леммами». Если не оговорено противное, то все это (а также примеры) — задачи для решения.

Изучение путем решения задач характерно для серьезного обучения математике, см. [HC19, §1.1], [ZSS, §1.2] и данные там ссылки. Оно продолжает древнюю культурную традицию.

Если условие задачи является формулировкой утверждения, то в задаче требуется это утверждение доказать (и тогда в ссылках мы называем это утверждение утверждением, а не задачей). *Загадкой* называется не сформулированный четко вопрос; здесь нужно придумать и четкую формулировку, и доказательство.

Определения важных понятий даны **жирным шрифтом**, чтобы их было проще найти.

Мы приглашаем школьников представлять свои письменные решения на конференциях школьников, см., например, [MMKS].

3 Число оборотов: определение и обсуждение

Везде рассматриваемые точки и ломаные расположены на плоскости.

Пусть O, A, B — точки, причем $A \neq O$ и $B \neq O$ (но, возможно, $A = B$). *Ориентированным (или направленным) углом* $\angle AOB$ называется число $t \in (-\pi, \pi]$, такое что вектор $\overrightarrow{OB}$ сонаправлен вектору, полученному из $\overrightarrow{OA}$ вращением на угол t против часовой стрелки. (Если Вы можете рассматривать векторы на плоскости как комплексные числа, то можете переписать это условие как $\overrightarrow{OB} \upuparrows e^{it}\overrightarrow{OA}$.) Далее рассматриваются ориентированные углы и слово «ориентированный» пропускается.

При решении задач можно использовать без доказательства следующее утверждение (близкое к аксиомам): *Для любых точек A, B, C на плоскости и точки O, не лежащей на объединении отрезков AB, BC, CA,*

• $\angle OAB + \angle OBC + \angle OCA = \pm 2\pi$*, если O лежит в выпуклой оболочке точек A, B, C,*

• $\angle OAB + \angle OBC + \angle OCA = 0$*, иначе.*

Числом оборотов $w(l, O)$ замкнутой ломаной $l = A_1 \ldots A_m$ вокруг не лежащей на ней точки O называется количество оборотов при вращении вектора, начало которого находится в точке O, а конец обходит l в заданном порядке вершин. Строго говоря,

$$2\pi \cdot w(l, O) := \angle A_1OA_2 + \angle A_2OA_3 + \ldots + \angle A_{m-1}OA_m + \angle A_mOA_1.$$

Например, на рисунке 3.1 $w(ABC, O) = \dfrac{1}{2\pi}(\angle AOB + \angle BOC + \angle COA) = +1$ и

$$2\pi \cdot w(ABCD, O) = \angle AOB + \angle BOC + \angle COD + \angle DOA = \angle BOD + \angle DOB = 0.$$

Задача 3.1. (a) Пусть ABC — правильный треугольник и O — его центр. Найдите $w(ABCABC, O)$.

(b) Приведите пример замкнутой ломаной l на плоскости, такой что $w(l, O) = 0$ для любой точки $O \in \mathbb{R}^2 - l$.

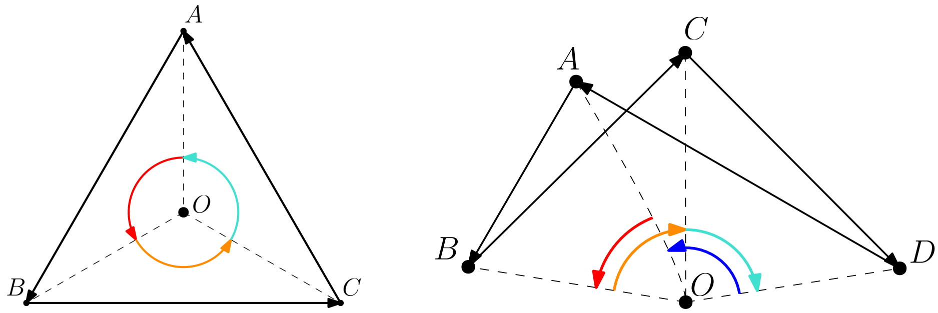

Рис. 3.1: $w(ABC, O) = +1$ и $w(ABCD, O) = 0$

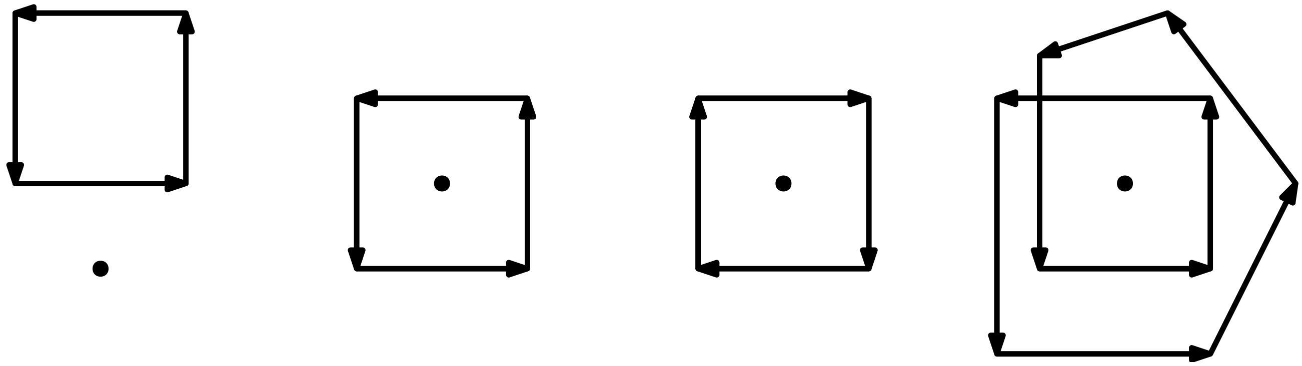

Рис. 3.2: Числа оборотов равны $0,\ +1,\ -1,\ +2$

Результат задачи 3.1.a показывает, что числа оборотов для разных ломаных с одинаковым объединением их отрезков могут быть разными.

Утверждение 3.2. *Число оборотов*

(a) любого контура выпуклого многоугольника;

(b) любой замкнутой ломаной без самопересечений

вокруг любой точки из внешности (внутренности) равно 0 *(*± 1*). См. рисунок 3.2.*

Пункт (b) доказывать не требуется; в зависимости от изложения он является либо следствием *теоремы Жордана* [Sk20, §1.4], либо леммой в ее доказательстве.

Задача 3.3. Для любых целого числа n и точки O существует замкнутая ломаная, число оборотов которой вокруг O равно n.

Утверждение 3.4. *Число оборотов* $w(A_1 \dots A_m, O)$ *является целым числом.*

Указание: согласно свойствам, отмеченным маркером в начале этого параграфа,

$$\angle A_{m-1}OA_m + \angle A_mOA_1 \equiv \angle A_{m-1}OA_1 \mod 2\pi.$$

См. некоторые указания и решения в [ABM+, §1]. Подробнее о числе оборотов и связанных с ним понятиях см. [ABM+] и ссылки в этой работе.

4 Классификация на плоскости без точки

В этом параграфе рассматриваются замкнутые ломаные и их гомотопность *на плоскости без точки* O.

Задача 4.1. (a) Число оборотов вокруг O является инвариантом гомотопности. Иными словами, замкнутые ломаные с разным числом оборотов вокруг O не гомотопны.

(b) Замкнутая ломаная l гомотопна одноточечной ломаной тогда и только тогда, когда $w(l, O) = 0$.

(c) Возьмем контур $\partial\Delta$ треугольника Δ, содержащего внутри себя точку O. Любая замкнутая ломаная l гомотопна $|w(l, O)|$-кратному обходу контура $\partial\Delta$

• против часовой стрелки при $w(l, O) \geq 0$,

• по часовой стрелке при $w(l, O) \leq 0$.

(Значит, замкнутые ломаные с одинаковым числом оборотов вокруг O гомотопны.)

Утверждение 4.2. *Следующее отображение является взаимно однозначным соответствием между множеством гомотопических классов замкнутых ломаных на плоскости без точки и множеством целых чисел. Отображение переводит замкнутую ломаную (точнее, ее гомотопический класс) в ее число оборотов вокруг точки.*

(Утверждение 4.2 доказано в задачах 3.3 и 4.1.)

Луч на плоскости называется *лучом общего положения относительно* l, если он не проходит через ее вершины.

Задача 4.3. Возьмем замкнутую ломаную l и луч общего положения OP относительно l.

(a) Верно ли, что количество точек пересечения ломаной l и луча OP имеет ту же четность, что и $w(l, O)$?

(b)* Количество звеньев ломаной l, пересекающих луч OP, имеет ту же четность, что и $w(l, O)$.

Полезно понять, что описанное выше двумерное утверждение 4.2 по сути является одномерным.

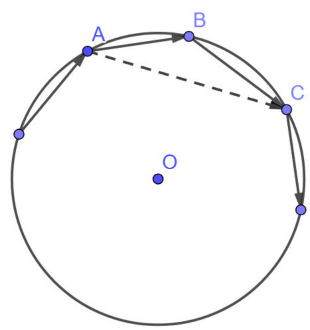

Рис. 4.1: Элементарное сокращение обхода

Задача 4.4. * Назовем *обходом* ориентированную циклическую последовательность точек (фиксированной) окружности, в которой никакие две точки не являются диаметрально противоположными. *Элементарным сокращением* обхода называется удаление такой его точки B, что для соседних с B точек A, C выпуклая оболочка точек A, B, C не содержит центра окружности (см. рисунок 4.1). Два обхода называются *гомотопными*, если они могут быть соединены последовательностью обходов, в которой один из любых двух последовательных обходов получен из другого элементарным сокращением.

(a) Обход l гомотопен одноточечному обходу тогда и только тогда, когда $w(l, O) = 0$ для центра O окружности.

(b) (загадка) Опишите обходы с точностью до гомотопности.

5 «Разрешение» парадокса Пуанкаре

Очевидно, что числа оборотов в примере к задаче 1.4.a, приведенном в презентации, вокруг точек P и Q равны нулю. Негомотопность в задаче 1.4.a следует из задачи 5.3 (или задачи 6.3). Идея заключается в использовании одного из следующих инвариантов гомотопности.

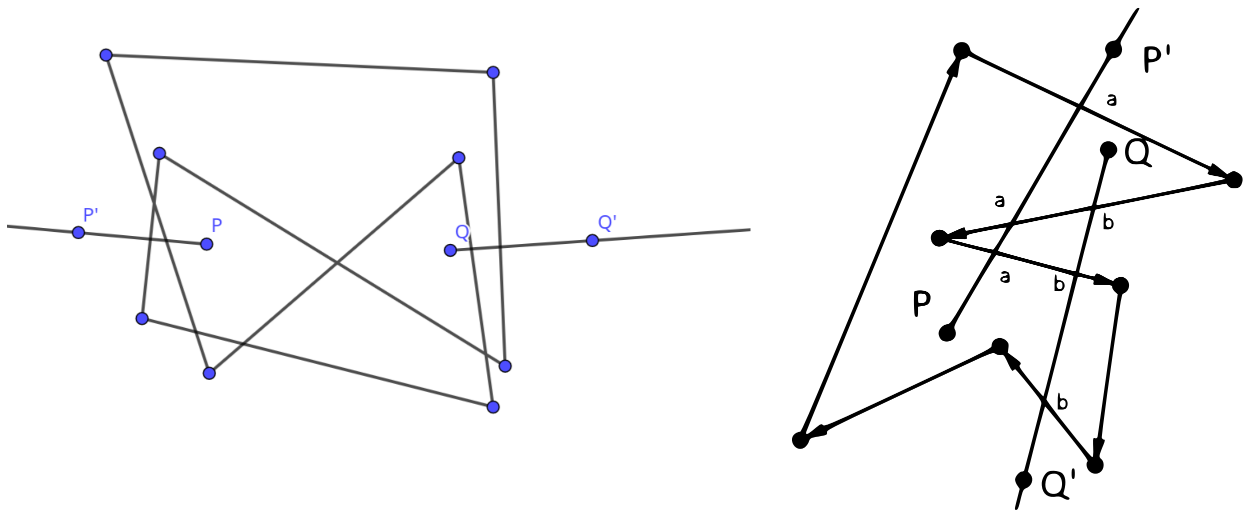

Рис. 5.1: Циклическое слово Пуанкаре по модулю 2: $abab$ (слева), $abaabb$ (справа)

В §§5–7

• l — замкнутая ломаная на плоскости без двух точек P, Q;

• PP' и QQ' — непересекающиеся лучи общего положения относительно l.

Будем двигаться по l и выписывать букву a (букву b) при каждом пересечении луча PP' (луча QQ'). Полученное ориентированное циклическое слово называется *циклическим словом Пуанкаре по модулю 2* (см. рисунок 5.1).

Задача 5.1. (a) Любое циклическое слово из букв a и b является циклическим словом Пуанкаре по модулю 2 некоторой замкнутой ломаной на плоскости без двух точек (для некоторых лучей PP', QQ').

(b)* Четность числа оборотов замкнутой ломаной l вокруг точки P (точки Q) есть четность количества букв a (букв b) в циклическом слове Пуанкаре по модулю 2 ломаной l (для любых лучей PP', QQ').

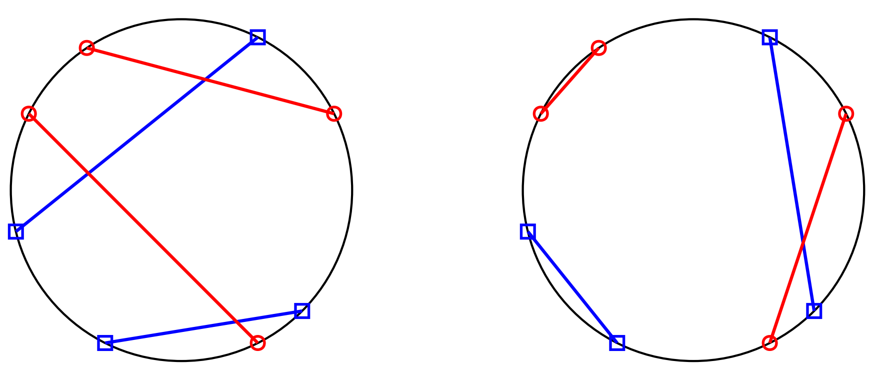

Рис. 5.2: Два разбиения на пары четырех красных точек (маленькие кружочки) и четырех синих точек (маленькие квадраты) на окружности

Пусть на окружности дано четное число красных точек и четное число синих точек, причем все эти точки попарно различны. Разобьем красные точки на пары, и синие точки на пары. Соединим точки в каждой красной/синей паре красной/синей хордой (см. рисунок 5.2). Множества красных точек и синих точек называются *зацепленными*, если количество пар пересекающихся красной и синей хорд нечетно.

Задача 5.2. Зацепленность не зависит от выбора разбиений на пары (см. рисунок 5.2).

Назовем *интересной* замкнутую ломаную l в плоскости без точек P, Q, для которой $w(l, P)$ и $w(l, Q)$ четны. По утверждению 4.1.a интересность сохраняется при замене ломаной на гомотопную. По утверждению 5.1.b для интересной замкнутой ломаной в циклическом слове Пуанкаре по модулю 2 количество букв a четно и количество букв b четно. Назовем интересную замкнутую ломаную *зацепленной*, если буквы a и b зацеплены.

Задача 5.3. Зацепленность интересной замкнутой ломаной не меняется при
(a) изменении лучей PP' и QQ';
(b) замене замкнутой ломаной l на гомотопную.

Подсказка: п. (b) вытекает из п. (a).

В п. (b) циклическое слово Пуанкаре по модулю 2 может не быть определено для некоторых промежуточных ломаных гомотопии. Поэтому следующий результат полезен для прямого доказательства утверждения 5.3.b.

Задача 5.4. Пусть даны две замкнутые ломаные, гомотопные на плоскости без двух точек P, Q. Возьмем непересекающиеся лучи общего положения PP' и QQ' относительно каждой из этих ломаных. Тогда эти ломаные могут быть соединены гомотопией, относительно каждой из ломаных которой лучи PP' и QQ' являются лучами общего положения.

Указание преподавателю. Большинству начинающих удобен вышеупомянутый подход к доказательству парадокса Пуанкаре. Однако, если школьник придумает идею решения задачи 7.7.a, разумно обсудить, сможет ли он развить ее до строгого доказательства.

6 Инвариант для плоскости без двух точек

Напомним, что в §§5–7
- l — замкнутая ломаная на плоскости без точек P, Q,
- PP' и QQ' — непересекающиеся лучи общего положения относительно l.

Задача 6.1. Существует ломаная l, такая что $w(l, P) = w(l, Q) = 0$, ломаная l не зацеплена, но l не гомотопна одноточечной ломаной.

Рассмотрим множество всех (конечных) циклических слов (включая пустое слово) из букв a, b. Для такого слова *элементарное сокращение* — замена любого из подслов aa, bb пустым подсловом. Такое слово называется *экономным*, если в нем нет ни одного из подслов aa и bb.

Задача 6.2. Циклическое слово из букв a, b посредством элементарных сокращений дает единственное экономное слово.

Экономная форма (или нормальная форма) циклического слова w из букв a, b — это экономное слово, полученное из w элементарными сокращениями. Обозначим через $E_{2,2,c}$ множество всех экономных слов. Обозначим через $e_2(l) \in E_{2,2,c}$ экономную форму циклического слова Пуанкаре по модулю 2 ломаной l. Априори $e_2(l)$ зависит от лучей PP' и QQ'.

Задача 6.3. Слово $e_2(l)$ не изменяется при

(a) изменении лучей PP' и QQ';

(b) замене замкнутой ломаной l на гомотопную.

Задача 6.4. Существует ломаная l, не гомотопная одноточечной ломаной, но для которой слово $e_2(l)$ пусто.

Два циклических слова из букв a, b называются *эквивалентными*, если их можно соединить последовательностью циклических слов, в которой одно из любых двух последовательных циклических слов может быть получено из другого элементарным сокращением. Обозначим через $F_{2,2,c}$ множество всех классов эквивалентности.

Задача 6.5. * (a) Слово $abab$ не эквивалентно пустому слову.

(b) Существуют ли два неэквивалентных циклических слова, оба состоящие из нечетного числа букв a и четного числа букв b?

(c) (загадка) Постройте «естественное» взаимно однозначное соответствие $E_{2,2,c} \to F_{2,2,c}$.

(d) (загадка) Опишите $E_{2,2,c}$ или, что то же самое, $F_{2,2,c}$.

Задача 6.6. * Класс эквивалентности циклического слова Пуанкаре по модулю 2 не меняется при

(a) изменении лучей PP' и QQ';

(b) замене замкнутой ломаной l на гомотопную.

7 Классификация на плоскости без двух точек

Приведенные выше гомотопические инварианты не являются полными (см. задачи 1.4, 1.5, 6.1, 6.4). Теперь мы готовы ввести полный инвариант.

В этом параграфе рассматриваются замкнутые ломаные и их гомотопия *на плоскости без двух точек P и Q*.

Пусть A, B, C, D — точки на плоскости, никакие три из которых не лежат на одной прямой. **Знаком** точки пересечения ориентированных отрезков $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ на плоскости назовем $+1$, если обход ABC происходит по часовой стрелке, и -1 в противном случае (см. рисунок 7.1).

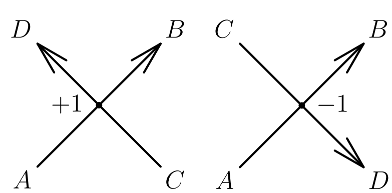

Рис. 7.1: Знак точки пересечения

Задача 7.1 (ср. с задачей 4.3)**.** * Возьмем замкнутую ломаную m на плоскости без точки O и луч OR общего положения относительно m. Тогда $w(m, O)$ равно сумме по звеньям x ломаной m знаков точек пересечения звена x и луча OR.

Hint. Доказательство аналогично задаче 4.3.

Задача 7.2. (a) (загадка) Аналогично §5 определите *циклическое слово Пуанкаре* из букв a, b, a^{-1}, b^{-1}.

(Подсказка: используйте определение знака.)

(b) (ср. с задачей 5.1.a) Любое циклическое слово из букв a, b, a^{-1}, b^{-1} является циклическим словом Пуанкаре некоторой замкнутой ломаной.

(Подсказка: используйте рис. 7.2.)

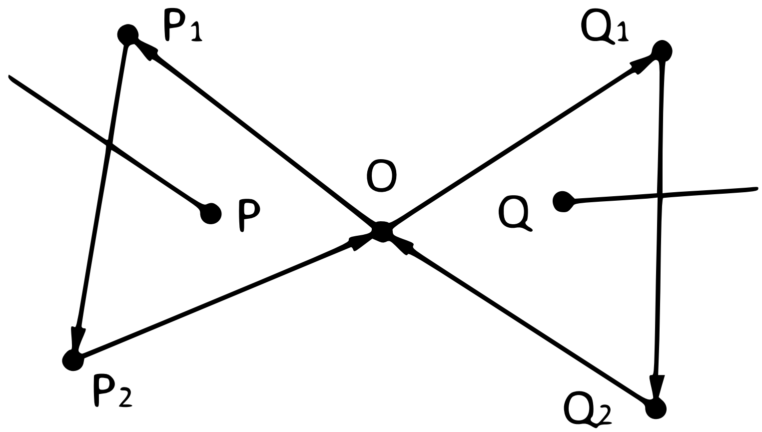

Рис. 7.2: «Восьмерка» и лучи общего положения

Рассмотрим множество всех (конечных) циклических слов (включая пустое слово) из букв a, a^{-1}, b, b^{-1}. Для такого слова *элементарное сокращение* — замена любого из подслов $aa^{-1}, a^{-1}a, bb^{-1}, b^{-1}b$ пустым подсловом. Такое слово называется *экономным*, если у него нет ни одного из подслов $aa^{-1}, a^{-1}a, bb^{-1}, b^{-1}b$.

Задача 7.3. Циклическое слово из букв a, b, a^{-1}, b^{-1} посредством элементарных сокращений дает единственное экономное слово.

Экономная форма (или нормальная форма) циклического слова w из букв a, b, a^{-1}, b^{-1} — это экономное слово, полученное из w элементарными сокращениями. Обозначим через $E_{2,c}$ множество всех циклических экономных слов. Обозначим через $e(l) \in E_{2,c}$ экономную форму циклического слова Пуанкаре ломаной l. Априори $e(l)$ зависит от лучей PP' и QQ'.

Задача 7.4 (ср. с задачей 6.3)**.** Слово $e(l)$ не изменяется при

(a) изменении лучей PP' и QQ';

(b) замене замкнутой ломаной l на гомотопную.

Задача 7.5 (ср. с задачей 6.4)**.** Если $e(l) = e(m)$ для замкнутых ломаных l и m, то l и m гомотопны.

Указание: Доказательство аналогично задаче 6.4. См. рис. 7.3.

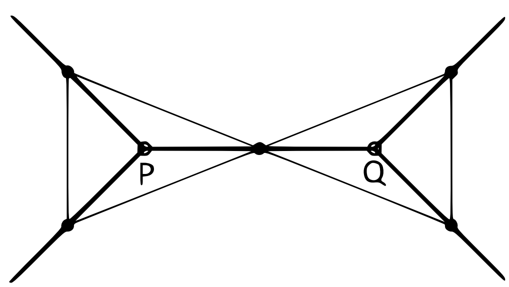

Рис. 7.3: Дополнительное построение и «двойственная» восьмерка на плоскости без двух точек P, Q

Утверждение 7.6. *Следующее отображение является взаимно однозначным соответствием между множеством гомотопических классов замкнутых ломаных на плоскости без двух точек и множеством $E_{2,c}$. Отображение переводит замкнутую ломаную в экономную форму ее циклического слова Пуанкаре.*

(Утверждение 7.6 доказано в задаче 7.2.b, 7.4 и 7.5.)

Из этого утверждения вытекает теорема 1.6 для $n = 2$.

Задача 7.7. * (загадка) Определите гомотопность ориентированных циклов в графе «восьмерке». Постройте взаимно однозначное соответствие между гомотопическими классами замкнутых ломаных на плоскости без двух точек и гомотопическими классами ориентированных циклов в графе «восьмерке».

Из этого утверждения вытекает аналог утверждения 7.6 для графа «восьмерки» вместо плоскости без двух точек.

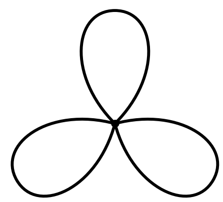

Рис. 7.4: Граф «букет трех окружностей»

Задача 7.8. (a) То же, что и в утверждении 7.6, с заменой плоскости без двух точек на плоскость без n точек.

(b)* То же, что и в задаче 7.7, с заменой плоскости без двух точек на плоскость без n точек, а графа «восьмерка» — на граф «букет n окружностей» (см. рисунок 7.4).

(c) Верен ли аналог утверждения 7.4.a для $n = 3$?

8 Умножение ломаных

Отмеченной замкнутой ориентированной **ломаной** $A_1 \dots A_m$ называется последовательность (упорядоченный набор) $(A_1, \dots, A_m)$ точек плоскости (не обязательно различных). Далее, слово «ориентированный» пропускается. Точка A_1 называется *отмеченной точкой.*

Обозначим через l^{-1} отмеченную замкнутую ломаную $A_1 A_m \dots A_2$ для отмеченной замкнутой ломаной $l := A_1 A_2 \dots A_m$.

В этом параграфе l_1, l_2 — отмеченные замкнутые ломаные с общей отмеченной точкой X.

Произведением (конкатенацией, соединением) отмеченных замкнутых ломаных $l_1 = XM_1 \dots M_m$ и $l_2 = XN_1 \dots N_n$ с общей отмеченной точкой называется отмеченная замкнутая ломаная $l_1 l_2 := XM_1 \dots M_m X N_1 \dots N_n$ (см. рис. 8.1).

Замечание. На плоскости без двух точек P, Q (рис. 7.2) возьмем отмеченные замкнутые ломаные $a := OP_1P_2$ и $b := OQ_1Q_2$, ограниченные которыми части плоскости пересекают $\{P, Q\}$ по P и по Q, соответственно. В этом замечании мы сокращаем «замкнутая ломаная, полученная из отмеченной замкнутой ломаной x забыванием отмеченной точки» до «замкнутая ломаная x».

Примером к задаче 1.4.a является замкнутая ломаная, $[a, b] := aba^{-1}b^{-1}$. На этом языке примером к задаче 1.4.b будет $[a, b]c[a, b]^{-1}c^{-1}$ (сделайте это строгим самостоятельно).

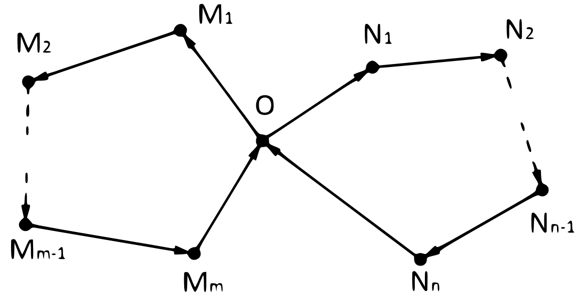

Рис. 8.1: Произведение отмеченных замкнутых ломаных $l_1 = OM_1 \dots M_m$ и $l_2 = ON_1 \dots N_n$

Вот версия парадокса Пуанкаре. *Замкнутые ломаные aba^{-1} и b гомотопны, но замкнутые ломаные $aba^{-1}b^{-1}$ и bb^{-1} не гомотопны (ломаная bb^{-1} гомотопна одноточечной замкнутой ломаной).*

Задача 8.1. (a) (аддитивность) Число оборотов произведения l_1l_2 вокруг точки O вне l_1, l_2 равно сумме чисел оборотов ломаных l_1 и l_2 вокруг O.

(b) * Пусть $A_0A_1A_2$ — правильный треугольник, а точка O — его центр. Для $j = 0, 1, 2$ возьмем ломаную s_j, не пересекающую луч OA_j и соединяющую A_{j+1} с A_{j+2}, где нумерация берется по модулю 3. Тогда $w(s_0s_1s_2, O) = \pm 1$. (Произведение $s_0s_1s_2$ определяется аналогично произведению отмеченных замкнутых ломаных.)

Задача 8.2. Умножение отмеченных замкнутых ломаных с общей отмеченной точкой X

(a) ассоциативно, но не имеет единичного элемента;

(b) (загадка) не порождает корректно определенного умножения на классах гомотопности.

Отмеченные замкнутые ломаные с общей отмеченной точкой называются *отмеченно гомотопными*, если они «гомотопны с сохранением отмеченной точки» (сделайте это строгим самостоятельно).

Задача 8.3. (a) Если отмеченные ломаные гомотопны в плоскости без точки O, то они также отмеченно гомотопны в плоскости без точки O.

(b) Существуют отмеченные ломаные, гомотопные в плоскости без двух точек, не являющиеся отмеченно гомотопными в плоскости без двух точек.

Задача 8.4. (a) Умножение классов отмеченной гомотопности отмеченных замкнутых ломаных корректно определено, ассоциативно и имеет единичный элемент.

(b) Для этого умножения каждый класс имеет обратный.

Таким образом, естественная групповая структура существует не на интересующем нас множестве (множество замкнутых ломаных с точностью до гомотопности), а на множестве, которое в данный момент кажется менее естественным (множество отмеченных замкнутых ломаных с точностью до отмеченной гомотопности).

Действительно, чтобы определить произведение, нужны *отмеченные* замкнутые ломаные; чтобы получить корректно определенное умножение на гомотопических классах, нужна *отмеченная* гомотопность (задачи 8.2.b и 8.4).

Далее, отмеченные замкнутые ломаные и их отмеченная гомотопия рассматриваются *на плоскости без двух точек P и Q.*

Слово Пуанкаре отмеченной замкнутой ломаной x определяется аналогично циклическому слову Пуанкаре, только движение вдоль x начинается и заканчивается в отмеченной точке. Рассмотрим множество всех (конечных) слов (включая пустое слово) из букв a, b, a^{-1}, b^{-1}. Для такого слова *элементарное сокращение* — это замена любого из подслов $aa^{-1}, a^{-1}a, bb^{-1}, b^{-1}b$ пустым подсловом. Два таких слова называются *эквивалентными*, если их можно соединить последовательностью слов, в которой одно из любых двух последовательных слов может быть получено из другого с помощью элементарного сокращения. Обозначим через F_2 множество всех классов эквивалентности (стандартное обозначение: $\langle a, b\rangle$).

Задача 8.5. * (a) Верно ли, что класс эквивалентности в F_2 слова Пуанкаре отмеченной замкнутой ломаной не меняется при изменении лучей PP' и QQ'?

(b) То же, при замене отмеченной замкнутой ломаной l на отмеченно гомотопную и фиксированных лучах PP' и QQ'.

(c) Умножение слов порождает операцию на F_2 и превращает F_2 в группу.

(эта группа называется *свободной группой с двумя образующими*).

(d) (ср. с задачей 7.5) Если слова Пуанкаре двух отмеченных замкнутых ломаных l_1, l_2 эквивалентны, то l_1 и l_2 отмеченно гомотопны.

Утверждение 8.6 (ср. с утверждением 7.6)**.** *Следующее отображение является изоморфизмом между группой классов отмеченной гомотопности отмеченных замкнутых ломаных на плоскости без двух точек и группой F_2. Отображение переводит отмеченную замкнутую ломаную в ее слово Пуанкаре.*

(Это доказано в задаче 8.5.)

Теорема 8.7 (загадка)**.** *(a) Для любого графа G с отмеченной точкой существует алгоритм, распознающий отмеченную гомотопность отмеченных ориентированных циклов в G.*

(b) Для любого графа G существует алгоритм, распознающий гомотопность ориентированных циклов в G.

(c) Для любых двух графов существует алгоритм, распознающий гомотопность симплициальных отображений *между ними. (См. определение в [Sk, § 9 «Гомотопическая классификация отображений»], [Sk20e].)*

Аналоги этой теоремы для 2-гиперграфов неверны! Это следует из алгоритмической неразрешимости проблемы тривиальности в некоторой группе, определяемой конечным числом образующих и соотношений. См. [Sk20, теорему 14.3.1] и ее обобщение в [Sk20e].

9 Решения некоторых задач

Доказательство утверждения 1.1.a (А. Мизев). Вот нужная гомотопия:

$$A_1A_2\ldots A_{n-1}A_n \to A_1A_2\ldots A_{n-1} \to \ldots \to A_1A_2 \to A_1.$$

□

Доказательство утверждения 1.2 (А. Мизев). На рисунке 1.2 изображены две ломаные с разным числом оборотов (у левой ±1, у правой 0 по утверждению в начале §3). По утверждению 4.1.a эти две ломаные не гомотопны. □

Примеры к задаче 1.4. См. рисунки 9.1, 1.5, 1.4.

Набросок доказательства утверждения 1.4.a (получен редактированием текста А. Мизева). Возьмем ломаную на рисунке 1.4 (см. также рисунки 9.1 (слева) и 1.5).

Легко проверить, что на плоскости без одной из данных точек, построенная ломаная гомотопна одноточечной.

Циклическое слово Пуанкаре по модулю 2 построенной ломаной равно *abab*. Это слово зацеплено, значит, по утверждению 5.3, ломаная не гомотопна одноточечной. □

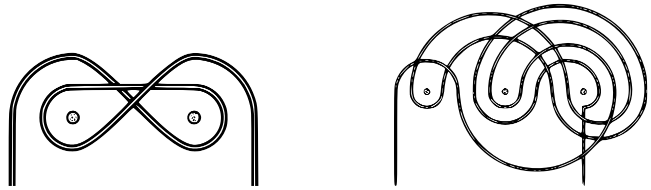

Рис. 9.1: Веревка на двух (слева) и трех (справа) гвоздях

Указания к задаче 4.1. (a) Достаточно доказать, что *если ломаная l_1 получена из ломаной l_2 элементарным сокращением, то $w(l_1, O) = w(l_2, O)$.*

Докажем это. Обозначим через A, B, C последовательные точки ломаной l_2, такие что «сокращение» вершины B дает ломаную l_1. Тогда

$$2\pi(w(l_1, O) - w(l_2, O)) = \angle AOB + \angle BOC - \angle AOC = 0,$$

где второе равенство справедливо по второму свойству ориентированных углов в §3 (см. рисунок 9.2).

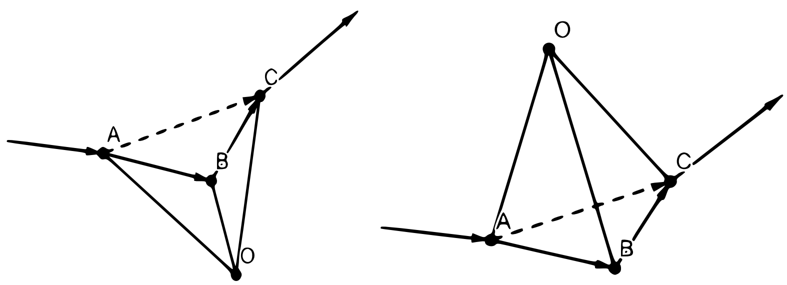

Рис. 9.2: Элементарное сокращение вершины B

(b) Часть «только тогда» вытекает из (a). Для доказательства части «тогда» достаточно доказать, что *если ломаная имеет более одной вершины и имеет нуль оборотов, то к ней можно применить элементарное сокращение.*

Докажем это. Если в ломаной некоторые две последовательные вершины совпадают, то можно одну из них элементарно сократить. Пусть теперь любые две последовательные вершины различны. Так как сумма углов равна нулю, то найдутся два соседних угла $\angle AOB$ и $\angle BOC$ разных знаков. Тогда точки A и C лежат в одной полуплоскости относительно прямой BO. Значит, треугольник ABC не содержит точку O. Поэтому можно сделать элементарное сокращение вершины B.

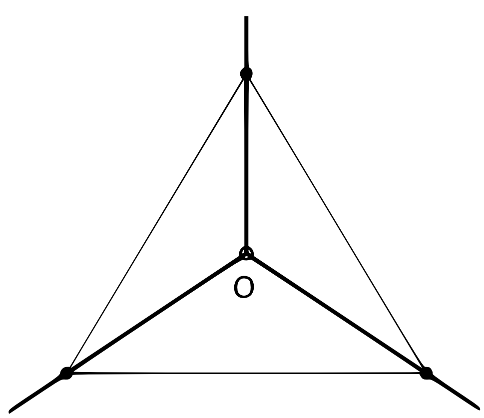

Рис. 9.3: Дополнительные лучи и «двойственный» треугольник на плоскости без точки

(c) Достаточно доказать, что *любая ломаная гомотопна ломаной, содержащей только вершины треугольника* Δ.

Докажем это. Обозначим вершины треугольника Δ через B_1, B_2, B_3.

Во-первых, в абзаце после (*) мы доказываем, что любая замкнутая ломаная l гомотопна замкнутой ломаной l', которая

(*) *содержит по крайней мере одну вершину* Δ, *и для любых трех последовательных вершин* X, B, Y *из* l' *либо* B *является вершиной* Δ, *либо точки* X, B, Y *лежат в* $\angle B_iOB_j$ *для некоторых* i, j.

Пара $\{XY,\ B\}$, состоящая из отрезка XY треугольника l и вершины B треугольника Δ, называется *плохой парой для* l, если $B \notin \{X, Y\}$ и B лежит в $\angle XOY$. Можно предположить, что свойство (*) не выполняется для l, и l содержит вершину треугольника Δ. Тогда существует плохая пара $\{XY,\ B\}$ для l. Добавим B к l между X и Y, используя обратную операцию к элементарному сокращению. Количество плохих пар для полученной замкнутой ломаной меньше, чем для l. С помощью конечного числа таких операций можно получить замкнутую ломаную, гомотопную l и удовлетворяющую условию (*).

Пусть l' — замкнутая ломаная, удовлетворяющая условию (*). Тогда любую вершину ломаной l', отличную от B_1, B_2, B_3, можно удалить элементарным сокращением. Полученная замкнутая ломаная также обладает свойством (*). Следовательно, с помощью конечного числа таких элементарных сокращений мы получаем замкнутую ломаную, содержащую только вершины треугольника Δ. □

Набросок другого доказательства утверждения 4.1.c (А. Абзалилов). Выберем вершину A ломаной l. Обозначим через $\overline{l}$ (не циклическую) последовательность точек, начинающуюся с A соответствующую ломаной l. Обозначим через $\overline{d} = B_1B_2B_3$ (не циклическую) последовательность вершин треугольника Δ, ориентированную так, что числа $w(\overline{d}, O)$ и $w(l, O)$ имеют одинаковый знак. Можно считать, что O не лежит на прямой AB_1. Обозначим

$$n := |w(l, O)|, \quad \overline{d}^{-1} := B_3B_2B_1, \quad \overline{d}^{-n} := \underbrace{\overline{d}^{-1} \ldots \overline{d}^{-1}}_{n} \quad \text{и} \quad x := \overline{l}AB_1\overline{d}^{-n}A.$$

Аналогично определим $\overline{d}^n$. Теперь нужная гомотопия от $\overline{l}$ к n-кратному обходу $\overline{d}^n$ контура $\partial\Delta$ строится так:

$$\overline{l} \to \overline{l}A \to \overline{l}AB_1 \to \overline{l}AB_1B_1 \to \overline{l}AB_1B_3B_3B_1 \to$$

$$\overline{l}AB_1B_3B_2B_2B_3B_1 \to \overline{l}AB_1B_3B_2B_1B_1B_2B_3B_1 \to$$

$$\ldots \to \overline{l}AB_1\overline{d}^{-n}\overline{d}^nB_1 \to \overline{l}AB_1\overline{d}^{-n}A\overline{d}^nB_1 = x\overline{d}^nB_1 \Rightarrow A\overline{d}^nB_1 \to \overline{d}^nB_1 \to \overline{d}^n.$$

Здесь все элементарные сокращения '$\to$' возможны (так как точка O не лежит на отрезке AB_1 и $O \notin \partial\Delta$), а гомотопия '$\Rightarrow$' строится так. Поскольку $w(x, O) = 0$, ломаная x гомотопна одноточечной ломаной. Более того, существует гомотопия между x и одноточечной ломаной A у каждой промежуточной ломаной которой есть вершина A. Припишем к каждой ломаной в этой гомотопии последовательность $\overline{d}^nB_1$. Получим гомотопию '$\Rightarrow$'. □

Набросок доказательства утверждения 5.4 (А. Мизев). Рассмотрим некоторую гомотопию между заданными ломаными l_1, l_2. Если ни одна из вершин ломаных гомотопии не лежит в объединении U лучей PP' и QQ', то утверждение доказано. Иначе обозначим через $A_3 \in U$ такую вершину. В следующем абзаце докажем, что существует точка $A_3' \notin U$, такая, что

(*) для любого «треугольника сокращения» $A_1A_2A_3$, треугольник $A_1A_2A_3'$ не содержит ни P, ни Q.

Используем следующее утверждение. *Пусть некоторый треугольник ABC не содержит некоторую точку O. Тогда существует $\epsilon > 0$ такое, что для любой точки B', удаленной от B не более, чем на ϵ, треугольник $AB'C$ не содержит O.* Применим его к каждому «треугольнику сокращения», в котором $B = A_3$, и к $O = P$ и $O = Q$. Возьмем $\epsilon_1 > 0$, меньшее всех полученных ϵ'в. Любая точка A_3', удаленная от A_3 не более чем на ϵ_1, имеет свойство (*). В ϵ_1-окрестности точки A_3 существует точка, не лежащая в U. Она и будет искомой.

В каждой ломаной гомотопии, содержащей A_3, заменим каждую вершину A_3 на A_3'. По свойству (*) получим гомотопию между l_1 и l_2. Так мы уменьшим количество вершин в ломаных гомотопии, лежащих в U. Будем повторять это, пока существует вершина одной из ломаных гомотопии, лежащая в U. В итоге получим нужную гомотопию между l_1 и l_2. □

Набросок доказательства утверждения 5.3.b. (Этот набросок получен редактированием текста А. Абзалилова.) Достаточно доказать, что зацепленность по модулю 2 не меняется при элементарном сокращении. По п. (а) можно взять лучи PP' и QQ' общего положения с ломаной до элементарного сокращения, так чтобы они не пересекали друг друга, и ни один из них не пересекал «треугольника сокращения». Тогда элементарное сокращение не меняет циклическое слово Пуанкаре по модулю 2. Значит оно не меняет и зацепленности по модулю 2. □

Набросок доказательства утверждения 6.2 (Е. Волович). Пусть, напротив, существует циклическое слово A, из которого элементарными сокращениями можно получить два разных экономных слова E_1 и E_2.

Фразу «слово Y получено некоторым элементарным сокращением слова X» сокращаем до $X \to Y$, а фразу «слово Y получено несколькими элементарными сокращениями слова X» сокращаем до $X \Rightarrow Y$.

Пока существует слово B, из которого элементарными сокращениями можно получить два разных экономных слова, и $A \Rightarrow B$, будем заменять A на B. Этот процесс конечен, так как с каждой заменой длина слова A уменьшается.

После этого для $i = 1, 2$ обозначим через B_i слово, такое что $A \to B_i$ и $B_i \Rightarrow E_i$. Тогда $B_1 \neq B_2$. Поэтому пары букв в A, сокращением которых получаются B_1 и B_2, не пересекаются. Значит, если сократить обе пары последовательно, то получится такое слово C, что $B_1 \to C$ и $B_2 \to C$.

Так как $A \Rightarrow C$, то из C элементарными сокращениями можно получить только одно экономное слово E. Так как $A \to B_1$, $B_1 \Rightarrow E_1$ и $B_1 \Rightarrow E$, то $E = E_1$. Аналогично $E = E_2$. Противоречие. □

Набросок доказательства утверждения 6.4 (получен редактированием текста А. Абзалилова). Отмечу на плоскости точки O, P_1, P_2 так, чтобы O была серединой отрезка PQ, никакие из отмеченных точек не лежали на одной прямой, и точка P лежала внутри треугольника OP_1P_2. Контрпримером является замкнутая ломаная $l := (OP_1P_2)^2$.

Модуль количества ее оборотов вокруг точки P равен 2. Значит, ломаная l не гомотопна одноточечной.

Направлю луч QQ' так, чтобы он не пересекал контура треугольника OP_1P_2. Тогда циклическое слово Пуанкаре по модулю 2 равно aa. Поэтому слово $e_2(l)$ пусто. □

Набросок доказательства утверждения 7.8.a (А. Абзалилов). Обозначим выколотые точки через $P_1, P_2, \dots, P_n$. Выберем точку X, не лежащую на одной прямой ни с какими двумя из них.

Будем двигаться по ломаной и выписывать букву p_i (букву p_i^{-1}) при каждом пересечении звена ломаной с лучом P_iP_i', если знак точки их пересечения равен $+1$ (-1). (Если вершина лежит на луче, то выписывание определяется немного более сложно.) Полученное ориентированное циклическое слово называется *циклическим словом Пуанкаре.*

Экономные циклические слова и *экономная форма* циклического слова из букв $p_1, \dots, p_n$, $p_1^{-1}, \dots, p_n^{-1}$ определяются аналогично случаю $n = 2$.

Утверждение. *Следующее отображение является взаимно однозначным соответствием между множеством гомотопических классов замкнутых ломаных на плоскости без n точек и множеством $E_{n,c}$ экономных циклических слов из букв $p_1, \dots, p_n$, $p_1^{-1}, \dots, p_n^{-1}$. Отображение переводит замкнутую ломаную l в экономную форму $e(l)$ ее циклического слова Пуанкаре.*

Аналогично утверждению 7.4.b, $e(l)$ не меняется при замене ломаной l на гомотопную. Поэтому отображение из утверждения *корректно определено* на множестве гомотопических классов.

Аналогично утверждению 7.2.b это отображение *сюръективно.*

Остается доказать его *инъективность.* Для каждого экономного циклического слова α из букв $p_1, \dots, p_n$, $p_1^{-1}, \dots, p_n^{-1}$ построим ломаную $k(\alpha)$ и докажем, что l гомотопна $k(e(l))$. Отметим на плоскости точки S_1 и T_1 так, чтобы S_1, T_1 и X не лежали на одной прямой, внутри треугольника S_1T_1X из выколотых лежала только точка P_1, и $w(XS_1T_1, P_1) = +1$. Аналогично определим точки S_i и T_i для каждого $i = 1, \dots, n$. Есть только одна ломаная $k(\alpha)$, соответствующая α, звенья которой — стороны треугольников S_iT_iX и никакие два соседних ребра не направлены в противоположные стороны.

Построим гомотопию, переводящую l в $k(e(l))$. Обозначим соседей вершины B ломаной l через B_- и B_+.

Пусть некоторая вершина B текущей ломаной лежит на одном из лучей P_iP_i'. Отметим на отрезке BB_+ точку B' так, чтобы треугольник $BB'B_-$ не содержал выколотых точек. Заменим B_-BB' на B_-B' элементарным сокращением. После таких операций *ни одна вершина текущей ломаной не будет лежать ни на одном из лучей P_iP_i'.*

Удлинением назовем операцию, обратную элементарному сокращению.

Пусть некоторое звено B_-B текущей ломаной пересекает несколько лучей P_iP_i'. Добавим удлинением точки на отрезке B_-B, чтобы никакие из получившихся звеньев не пересекали более одного луча P_iP_i'. После таких операций *каждое звено текущей ломаной пересекает не более одного луча P_iP_i'.*

Пусть некоторое звено B_-B текущей ломаной пересекает один луч P_iP_i'. Без ограничения общности $w(XB_-B, P_i) = +1$. Сделаем удлинения $B_-B \to B_-S_iB \to B_-S_iT_iB$. После таких операций *каждое звено текущей ломаной либо не пересекает ни одного из лучей P_jP_j', либо совпадает с отрезком S_jT_j.*

Пусть некоторое звено B_-B текущей ломаной не пересекает ни один из лучей P_iP_i'. Сделаем удлинение $B_-B \to B_-XB$. После таких операций *каждое звено текущей ломаной будет идти по сторонам одного из треугольников S_iT_iX.*

Уберем соседние рёбра, направленные в разные стороны: $B_-BB_-B_{++} \to B_-B_-B_{++} \to B_-B_{++}$, где B_{++} — вершина, следующая за $B_+ = B_-$. Получится ломаная $k(e(l))$.

Значит l, и $k(e(l))$ гомотопны. □

Набросок доказательства утверждения 8.1.b (А. Абзалилов). Для $i = 0, 1, 2$ обозначим через m_i замкнутую ломаную с теми же вершинами, как в s_i в таком же порядке. Рассмотрим произведение $m_0m_1m_2$, где для произведения m_0m_1 в качестве отмеченной точки выбрана A_2, а для $(m_0m_1)m_2$ выбрана A_0. Обозначим через s произведение ломаных $s_0s_1s_2$ и $A_2A_1A_0$, где в качестве отмеченной точки выбрана A_2. В этом решении мы пропускаем O в обозначении для числа оборотов. Тогда

$$w(s_0s_1s_2) + w(A_2A_1A_0) \overset{(1)}{=} w(s) \overset{(2)}{=} w(m_0m_1m_2) \overset{(3)}{=} \sum_{j=0}^{2} w(m_j) \overset{(4)}{=} 0.$$

Равенства (1) и (3) верны по п. (a) (аддитивность).

Равенство (2) верно, поскольку у ломаной s те же ориентированные звенья, что и у ломаной $m_0m_1m_2$.

Равенство (4) верно, ибо луч OA_i не пересекается ни с одним из звеньев ломаной m_i, откуда по утверждению 7.1 $w(m_i, O) = 0$.

Поэтому $w(s_0s_1s_2, O) = -w(A_2A_1A_0, O) = \pm 1$. □

Другое доказательство утверждения 8.1.b приведено в [ABM+, конец §1].

Список литературы

[ABM+] * *Э. Алкин, Е. Бордачева, А. Мирошников, А. Скопенков,* Инварианты почти вложений графов в плоскость, arXiv:2410.09860.

[DDM+] *E. Demaine, M. Demaine, Y. Minsky, J. Mitchell, R. Rivest and M. Pătraşcu.* Picture-Hanging Puzzles, Theory Comput. Syst., 54 (2014) 531–550, arXiv:1203.3602.

[GG] * https://en.wikipedia.org/wiki/Geometric_group_theory

[HC19] * *C. Herbert Clemens.* Two-Dimensional Geometries. A Problem-Solving Approach, Amer. Math. Soc., 2019.

[MMKS] * Московская математическая конференция школьников, https://old.mccme.ru//mmks//index.htm

[Sk] * *А. Скопенков.* Алгебраическая топология с алгоритмической точки зрения, http://www.mccme.ru/circles/oim/algor.pdf.

[Sk20] * *А. Скопенков,* Алгебраическая топология с геометрической точки зрения, Москва, МЦНМО, 2020 (2е издание). Обновляемая версия части книги: http://www.mccme.ru/circles/oim/obstruct.pdf

[Sk20e] * *A. Skopenkov.* Extendability of simplicial maps is undecidable, Discr. Comp. Geom., 69:1 (2023), 250–259, arXiv:2008.00492.

[Zi10] * *D. Živaljević*, Borromean and Brunnian Rings, http://www.rade-zivaljevic.appspot.com/borromean.html.

[ZSS] * Элементы математики в задачах: через олимпиады и кружки к профессии. Сборник под редакцией А. Заславского, А. Скопенкова и М. Скопенкова. М.: МЦНМО, 2018. Обновляемая версия части книги: http://www.mccme.ru/circles/oim/materials/sturm.pdf.

В этом списке звездочками отмечены книги, обзоры и популярные статьи.