

Группа "Рыба"

Гаврилюк А.А., 16.11.08

1. Все углы треугольника ABC меньше 120° . Докажите, что внутри его существует точка, из которой все стороны треугольника видны под углом 120° (точка Торичелли).
2. Дан треугольник ABC . Найдите внутри его точку O , для которой сумма длин отрезков OA, OB, OC минимальна.
3. Дан треугольник ABC . На его сторонах AB и BC построены внешним образом квадраты $ABMN$ и $BSPQ$. Докажите, что центры этих квадратов и середины отрезков MQ и AC образуют квадрат.
4. На сторонах треугольника ABC внешним образом построены правильные треугольники A_1BC, AB_1C и ABC_1 . Докажите, что $AA_1 = BB_1 = CC_1$.
5. На сторонах треугольника ABC внешним образом построены правильные треугольники ABC_1, AB_1C и A_1BC . Пусть P и Q - середины отрезков A_1B_1 и A_1C_1 . Докажите, что треугольник APQ правильный.
6. На сторонах AB и AC треугольника ABC внешним образом построены правильные треугольники ABC' и $AB'C$. Точка M делит сторону BC в отношении $BM : MC = 3 : 1$; K и L - середины сторон AC' и $B'C$. Докажите, что углы треугольника KLM равны $30^\circ, 60^\circ$ и 90° .
7. Все углы треугольника ABC меньше 120° . Докажите, что сумма расстояний от его точки Торичелли до его вершин равна $\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{2}} + 2\sqrt{3}S$, где a, b, c - длины сторон треугольника, а S - его площадь.
8. Все углы треугольника ABC меньше 120° , T - его точка Торичелли. Доказать, что прямые Эйлера треугольников ABT, BCT, CAT и пересекаются в одной точке.
9. На сторонах выпуклого центрально симметричного шестиугольника $ABCDEF$ внешним образом построены правильные треугольники. Докажите, что середины отрезков, соединяющих вершины соседних треугольников, образуют правильный шестиугольник.
10. Стороны треугольника ABC видны под равными углами из точки F внутри треугольника. Чевяны BF и CF пересекают стороны AC и AB в точках D и E соответственно. Докажите, что $AB + AC \geq 4DE$.