

Деревья и код Прюфера.

И каждый куст свирепым хищником казался...

Мы будем рассматривать графы на n вершинах, у которых вершины занумерованы числами от 1 до n . Будем кодировать деревья и леса.

Построим *код Прюфера* дерева: найдём в дереве висячую вершину с минимальным номером, первым числом в коде будет номер той вершины, с которой она соединена. Её вычеркнем. И так далее получим всего $n - 2$ числа: последнее ребро кодировать не будем.

Одноцикловый граф на n вершинах — это связный граф, имеющий ровно один цикл.

Задача 1.

- Постройте код для простой цепи по вершинам с последовательными номерами.
- Постройте код для звезды с вершиной i в центре.

Теперь мы будем по коду восстанавливать дерево.

Задача 2. Как по коду понять, было ли дерево

- простой цепью;
- звездой;
- возрастающим бинарным деревом.

Задача 3. Выясните по коду набор висячих вершин дерева.

Задача 4. Найдите способ по коду построить дерево с таким кодом.

В задачах 5 и 6 требуется нарисовать деревья на плоскости без самопересечений.

Задача 5. (чтобы не было скучно) Восстановите дерево по коду: 5, 3, 7, 1, 4, 10, 8, 2, 6.

Задача 6. (чтобы было даже весело) Восстановите дерево по коду:

2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 10, 11, 8, 12, 15, 14, 16, 17, 18, 19, 20, 1, 23, 24, 25, 22, 13.

Задача 7. Какие последовательности бывают кодами?

Задача 8. (*письменная*) Покажите, что коды из предыдущей задачи и деревья находятся в биективном соответствии.

Задача 9 (формула Кэли). Сколько существует деревьев на n вершинах с занумерованными числами от 1 до n вершинами?

Задача 10. Докажите, что количество лесов на n вершинах с r деревьями, где вершины с номерами от 1 до r в разных деревьях, равно $F(r, n) = rn^{n-1-r}$.

Задача 11. Выведите, что на n вершинах одноцикловых графов с занумерованными вершинами существует ровно

$$C(n) = \left(\sum_{r=3}^n \prod_{j=1}^{r-1} \left(1 - \frac{j}{n} \right) \right) \cdot \frac{1}{2} n^{n-1}$$