График и количество корней кубического многочлена

А.СКОПЕНКОВ

В ЭТОЙ СТАТЬЕ МЫ ПОКАЖЕМ, КАК ЭЛЕментарно находить экстремумы кубических многочленов – и, тем самым, находить количество их корней. Точнее, мы сведем задачу о нахождении экстремумов к задаче о поиске корней.

Мы продемонстрируем общий метод на конкретных простых рассуждениях. Этот подход принадлежит Пьеру Ферма (1601–1665); теоремы 3, 4, 5, 6 и 7 получены им или еще ранее. Об увлекательной истории этих открытий написано, например, в книгах [1]–[4].

Формулировки

В школе изучают следующие факты.

Теорема 1. *Пусть a и b – вещественные числа. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(1) существуют вещественные числа x, y такие, что $a = x + y$ и $b = xy$;

(2) уравнение $t^2 - at + b = 0$ имеет вещественный корень;

(3) $4b - a^2 \le 0$.

Эквивалентность $(2) \Leftrightarrow (3)$ можно уточнить: квадратное уравнение $t^2 - at + b = 0$ имеет два решения при $D = a^2 - 4b > 0$, имеет одно решение при $D = 0$ и не имеет решений при $D < 0$.

Заметим, что модуль дискриминанта D – это расстояние от вершины параболы до оси абсцисс.

Функция f называется *строго возрастающей* на данном интервале, если $f(t_1) > f(t_2)$ для любых $t_1 > t_2$ из этого интервала. Аналогично определяется строгое убывание.

Теорема 2. *Пусть a и b – вещественные числа. Тогда функция $t^2 - at + b$ строго убывает на $\left(-\infty; \frac{a}{2}\right]$ и строго возрастает на $\left[\frac{a}{2}, +\infty\right)$.*

Эти теоремы (как и формула для корней квадратного уравнения) доказываются при помощи равенства

$$t^2 - at + b = \left(t - \frac{a}{2}\right)^2 + \left(b - \frac{a^2}{4}\right).$$

Мы проиллюстрируем понятие производной на примере доказательства хорошо известного обобщения приведенных теорем на многочлены *третьей* степени. В этом разделе мы приводим «ведущие» частные случаи, в которых второй коэффициент, при t^2, равен нулю. Формулировки результатов для общего случая (теоремы 7 и 5) немного более громоздкие, а их доказательства состоят в несложном сведении к «ведущим» частным случаям. Они приводится в следующих разделах.

Теорема 3. *Пусть b и c – вещественные числа. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(1) существуют попарно различные вещественные числа x, y, z, такие что

$$0 = x + y + z, \quad b = xy + yz + zx \quad и \quad c = xyz;$$

(2) уравнение $t^3 + bt - c = 0$ имеет три попарно различных вещественных корня;

(3) $4b^3 + 27c^2 < 0$.

Заметим, что

- условие (3) заведомо не выполнено при $b \ge 0$;
- условие (3) равносильно условию $b < -3\sqrt[3]{\frac{c^2}{4}}$ или условию $|c| < 2\sqrt{-\frac{b^3}{27}}$;
- выражение $4b^3 + 27c^2$ пропорционально произведению ординат точек экстремума функции $f(t) = t^3 + bt - c$ (см. следующие лемму и теорему).

Теорема 4. *Пусть b и c – вещественные числа. Тогда функция $t^3 + bt - c$*

- *при $b \ge 0$ строго возрастает на $(-\infty; +\infty)$;*
- *при $b < 0$ строго возрастает на $\left(-\infty; -\sqrt{-\frac{b}{3}}\right]$, строго убывает на*

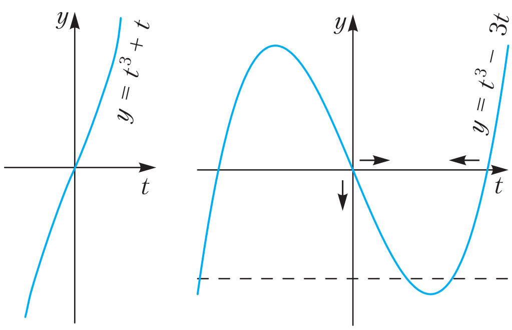
DOI: https://doi.org/10.4213/kvant20190404

$\left[-\sqrt{-\frac{b}{3}};\sqrt{-\frac{b}{3}}\right]$ *и строго возрастает на* $\left[\sqrt{-\frac{b}{3}};+\infty\right)$.

Заметим, что метод Ферма иллюстрируется именно на доказательстве теоремы 4. Она применяется для доказательства наиболее нетривиальной части теоремы 3.

Анализ: доказательство теоремы 4

Эвристические соображения для вывода теоремы 4 (формально, они не используются в доказательстве). Свободный член c при исследовании на возрастание и убывание не играет роли. На рисунке приведены графики функции $f(t) = t^3 + bt$ при разных b.



Графики $y = t^3 + t$ *и* $y = t^3 - 3t$

Ясно, что

- при $b \geq 0$ функция $f(t)$ возрастает,
- при $b < 0$ функция $f(t)$ имеет локальный максимум и локальный минимум.

Покажем, как найти локальный максимум и локальный минимум на примере случая $b = -3$ т.е. для функции $f(t) = t^3 - 3t$. Условие строгого возрастания функции f равносильно условию $\varphi(t_1, t_2) > 0$ для любых различных t_1, t_2, где

$$\varphi(t_1, t_2) = \frac{f(t_1) - f(t_2)}{t_1 - t_2} =$$

$$= \frac{t_1^3 - t_2^3 - 3(t_1 - t_2)}{t_1 - t_2} = t_1^2 + t_1 t_2 + t_2^2 - 3. \quad (*)$$

Если эти условия выполнены для любых двух «близких по значению» t_1, t_2, то в силу транзитивности неравенств они выполняются и для любых двух t_1, t_2 в данном интервале. Так мы приходим к догадке, что граничные точки интервалов, на которых f монотонна, являются корнями уравнения $\varphi(t,t) = t^2 + tt + t^2 - 3 = 0$. Эти корни равны ± 1.

Смысл этого построения – замена сложного условия $\varphi(t_1, t_2) > 0$ возрастания функции на гораздо более простое условие $\varphi(t,t) > 0$ (в нашем случае это $3t^2 - 3 > 0$). Гениальная догадка первопроходцев математического анализа состояла в том, что «в большинстве интересных случаев» эти условия равносильны. Эта догадка многократно использовалась Ферма, Ньютоном, Лейбницем, Эйлером и другими. Четкие определения и строгие доказательства появились только в XIX веке. Функция $\varphi(t,t)$ называется *производной* функции f.

Доказательство теоремы 4. Можно считать, что свободный член $-c$ равен нулю (на возрастание/убывание f он не влияет). При $b \geq 0$ функция $t^3 + bt$ строго возрастающая. Пусть теперь $b < 0$. Будем считать, что $b = -3$. Случай произвольного $b < 0$ сводится к $b = -3$ заменой $u = t\sqrt{-b/3}$. Введем $\varphi(t_1, t_2)$ по формуле $(*)$ для $f(t) = t^3 - 3t$. Тогда $\varphi(t_1, t_2) > 0$ для любых различных $t_1, t_2 \geq 1$. Следовательно, $f(t)$ строго возрастает на $[1; +\infty)$. Два другие утверждения теоремы доказываются аналогично.

Теорема 5. *Пусть a, b, c – вещественные числа. Тогда функция* $f(t) = t^3 - at^2 + bt - c$

- *при* $3b \geq a^2$ строго возрастает на $(-\infty; +\infty)$;
- *при* $3b < a^2$ строго возрастает на $\left(-\infty; \frac{a-\delta}{3}\right]$, строго убывает на $\left[\frac{a-\delta}{3}; \frac{a+\delta}{3}\right]$ и строго возрастает на $\left[\frac{a+\delta}{3}; +\infty\right)$, где $\delta = \sqrt{a^2 - 3b}$.

Упражнение 1. Докажите эту теорему, сведя ее к случаю $a = 0$ подходящей заменой переменной: $u = t - \frac{a}{3}$.

Упражнение 2. Найдите максимальные интервалы строгого возрастания (убывания) функции

а) $f(t) = t^4 - 4t$;

б) $f(t) = t^4 - 12t^3 + 22t^2 - 24t + 10$.

Алгебра: доказательства теорем 3, 6 и 7

Теорема 3 доказывается аналогично следующему результату.

Теорема 6. *Пусть b и c – вещественные числа. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(1) существуют вещественные числа x, y, z, такие что

$$0 = x + y + z,\ b = xy + yz + zx \text{ и } c = xyz;$$

(2) уравнение $t^3 + bt - c = 0$ имеет три вещественных корня с учетом кратности;

(3) $4b^3 + 27c^2 \le 0$.

Обобщим эту теорему, добавив квадратичный член $-at^2$:

Теорема 7. *Пусть a, b, c – вещественные числа. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(1) существуют вещественные числа x, y, z, такие что

$$a = x + y + z,\ b = xy + yz + zx \text{ и } c = xyz;$$

(2) уравнение $t^3 - at^2 + bt - c = 0$ имеет три вещественных корня с учетом кратности;

(3) $4\left(b - \dfrac{a^2}{3}\right)^2 + 27\left(c - \dfrac{ab}{3} + \dfrac{2a^3}{27}\right)^2 \le 0$.

Доказательство равносильности (1) ⇔ (2) в теоремах 6 и 7. Напомним, что кубический многочлен имеет, с учетом кратности, три вещественных корня x, y, z, если выполнено равенство многочленов

$$t^3 - at^2 + bt - c = (t - x)(t - y)(t - z)$$

(это равенство означает, что равны коэффициенты при соответствующих степенях). При этом некоторые из чисел x, y, z, могут совпадать – тогда говорят о *кратных* корнях. Раскрывая скобки, видим, что это равносильно условию (1) (иначе говоря, мы получили *теорему Виета* для многочленов третьей степени). Для доказательства равносильности (2) ⇔ (3) сначала сведем теорему 7 к частном случаю $a = 0$ (т.е. к теореме 6).

Сведение теоремы 7 к частному случаю $a = 0$, т.е. к теореме 6. Положим $u = t - \dfrac{a}{3}$. Тогда $t = u + \dfrac{a}{3}$, поэтому

$$t^3 - at^2 + bt - c =$$
$$= u^3 + \left(b - \frac{a^2}{3}\right)u - \left(c - \frac{b}{3} + \frac{2a^3}{27}\right).$$

Таким образом, теорема 7 следует из частного случая $a = 0$, т.е. из теоремы 6.

Теперь рассмотрим два случая: $b \ge 0$ и $b < 0$.

Доказательство равносильности (2) ⇔ (3) в теореме 6 для $b \ge 0$. Сначала предположим, что требуемые корни x, y, z существуют. При $b \ge 0$ функция $t^3 + bt - c$ строго возрастающая (это тривиальный случай теоремы 4), поэтому уравнение $t^3 + bt - c = 0$ имеет не больше одного действительного корня. Значит, $x = y = z$ (это кратный корень). Этот факт и условие $x + y + z = 0$ влекут равенство $x = y = z = 0$. Следовательно, $b = c = 0$, откуда $4b^3 + 27c^2 = 0$.

Теперь предположим, что $4b^3 + 27c^2 \le 0$. Тогда $b = c = 0$, поэтому можем взять $x = y = z = 0$.

Лемма. *Для любых $b \le 0$ и c обозначим $f(t) = t^3 + bt - c$. Тогда*

$$f\left(\sqrt{-\frac{b}{3}}\right)f\left(-\sqrt{-\frac{b}{3}}\right) = \frac{4b^3}{27} + c^2.$$

Доказательство леммы. Будем считать, что $b = -3$ (общий случай сводится к этому частному заменой $u = t\sqrt{-b/3}$). Имеем $-f(t) = c - t(t^2 - 3)$, поэтому

$$f(-1)f(1) = (c + 2\cdot 1)(c - 2\cdot 1) =$$
$$= c^2 - 4 = \left(4b^3 + 27c^2\right)/27.$$

Доказательство равносильности (2) ⇔ (3) в теореме 6 для $b < 0$. Будем опять считать, что $b = -3$. Обозначим $f(t) = t^3 - 3t - c$. По лемме, неравенство (3) равносильно условию $f(-1)f(1) \le 0$.

Предположим, что выполнено условие (2), т.е. корни x, y, z существуют. Так как $xy + yz + zx = b = -3 < 0$, то случай $x = y = z$ невозможен. Поэтому уравнение $f(t) = 0$ имеет по крайней мере два различных вещественных корня. Тогда, по теореме 4 для $b = -3$, числа $f(-1)$ и $f(1)$ «имеют различные знаки», т.е. $f(-1)f(t) \le 0$. Действительно, если $f(-1) > 0$ и $f(1) > 0$, то по теореме 4 уравнение $f(t) = 0$ имеет не более одного вещественного корня. Аналогично разбирается случай, когда $f(-1) < 0$ и $f(1) < 0$.

Теперь предположим, что $f(-1)f(1) \le 0$, т.е. верно неравенство (3).

Пусть сначала $f(-1)f(1) = 0$. Тогда $c^2 - 4 = 0$. Положим $x = y = -\operatorname{sgn} c$ и $z = 2\operatorname{sgn} c$ (читатель наверняка догадался, как подобрать эти формулы).[1]

[1] Значение функции $\operatorname{sgn} c$ равно 1, если $c > 0$, равно −1, если $c < 0$, и равно 0, если $c = 0$.

Пусть теперь $f(-1)f(t)<0$. Обозначим через t_+ наибольшее из чисел 2 и $1+|c|$. Тогда

$t_+ \geq 1+|c|>1$ и

$$f(t_+)=t_+\left(t_+^2-3\right)-c>\left(1+|c|\right)\left(2^2-3\right)-c>0.$$

Аналогично доказывается, что существует $t_-<-1$ такое, что $f(t_-)<0$. Так как $f(t_-)<-1$, $t_+>1$, $f(t_-)<0<f(t_+)$ и $f(-1)f(1)<0$, то по теореме 4 и теореме 8 о промежуточном значении (см. ниже) уравнение $f(t)=0$ имеет три вещественных корня. Мы возьмем их в качестве x, y, z.

Теорема 8 (о промежуточном значении). *Для многочлена* f *и чисел* $a<b$ *если* $f(a)>0>f(b)$, *то существует такое* $c\in(a,b)$, *что* $f(c)=0$.

Строгое доказательство этой интуитивно очевидной теоремы несложно, но требует аккуратного построения теории вещественных чисел.

Набросок другого доказательства равносильности $(2)\Leftrightarrow(3)$ в теореме 6 для $b<0$. Сначала повторяем первый абзац предыдущего доказательства.

Предположим, что требуемые корни x, y, z существуют. Будем считать, что все они отличны от ±1 (этот случай можно рассмотреть отдельно). Тогда из равенства $-3=xy+$ $+xz+yz=-x^2-xy-y^2$ следует, что на каждом из интервалов $(-\infty;1)$, $(-1;1)$, $(1;+\infty)$ находится не более одного корня. Поэтому на каждом из интервалов есть ровно один корень. Тогда из равенства $f(t)=$ $=(t-x)(t-y)(t-z)$ следует, что $f(-1)>0$ и $f(1)<0$. Поэтому $f(-1)f(1)<0$.

Теперь предположим, что $f(-1)f(1)\leq 0$. Тогда по теореме 8 уравнение $f(t)=0$ имеет корень $x\in[-1;1]$. Значит,

$$f(t)=f(t)-f(x)=$$
$$=(t-x)\left(t^2+xt+\left(x^2-3\right)\right).$$

Будем считать, что $x\neq\pm1$ (этот случай можно рассмотреть отдельно). Так как $x\in(-1;1)$, то дискриминант квадратного трехчлена $t^2+xt+\left(x^2-3\right)$ (от t) положителен. Значит, по теореме 1 уравнение $f(t)=0$ имеет еще два корня y, z.

Упражнение 3. Как по числам n, p, q определить количество решений уравнения:

а) $t^4-4t+q=0$; б) $t^4+pt+q=$;

в) $t^n+pt+q=0$?

Литература

1. *С.Г.Гиндикин.* Рассказы о математиках и физиках. Библиотечка «Кванта». – М.: Наука, 1982.

2. *В.В.Прасолов*, История математики, часть I. – М.: МЦНМО, 2018.

3. *Д.Я.Стройк*. Краткий очерк истории математики. – М.: Наука, 1984.

4. Математика XVII столетия // История математики / Под редакцией А.П.Юшкевича, в трех томах Т. II. – М.: Наука, 1970.