Многочлены

Вводные задачи

Задача 1. Даны числа x, y, z. Известно, что числа $x+y+z$, $xy+xz+yz$ и xyz положительны. Докажите, что x, y и z также положительны.

Задача 2. Пусть $P(x) = x^2 - x + 1$. Решите уравнение $\underbrace{P(P(\ldots(P(x))\ldots))}_{n} = x$.

Задача 3. Многочлен с а) целыми; б) вещественными коэффициентами принимает простые значения при всех натуральных значениях аргумента. Докажите, что этот многочлен — константа.

Задача 4. Данные многочлены $P(x)$ и $Q(x)$ удовлетворяют соотношению $P(Q(x)) = Q(P(x))$. Докажите, что если уравнение $P(x) = Q(x)$ не имеет действительных решений, то и уравнение $P(P(x)) = Q(Q(x))$ не имеет действительных решений.

Задача 5. При каких a и b многочлен $x^4+x^3+2x^2+ax+b$ является квадратом другого многочлена?

Задача 6. Докажите, что если значение трехчлена ax^2+bx+c при всех целых x является а) точным квадратом, то $b^2 = 4ac$; б) точной четвертой степенью, то $a = b = 0$.

Задача 7. Дан приведенный многочлен четной степени $P(x) = x^{2n} + a_{2n-1}x^{2n-1} + \cdots + a_0$ с целыми коэффициентами. Известно, что его значения в бесконечном количестве целых точек есть квадраты. Докажите, что сам многочлен $P(x)$ — квадрат некоторого многочлена $Q(x)$. Верно ли, что коэффициенты $Q(x)$ целые?

Задача 8. Дан многочлен $P(x)$ с целыми коэффициентами. Доказать, что среди значений многочлена в натуральных точках есть бесконечно много имеющих одну и ту же сумму цифр.

Задача 9. а) Существует ли квадратный трехчлен $P(x)$ с целыми коэффициентами такой, что для любого натурального числа n, в десятичной записи которого участвуют одни единицы, число $P(n)$ также записывается одними единицами?

б) Опишите все такие трехчлены;

в) и даже все таки многочлены.

Задача 10. Для многочлена $R(x)$ обозначим через $h(R)$ сумму номеров его ненулевых коэффициентов. Докажите, что для любого многочлена $P(x)$ степени 100 найдется такой многочлен $Q(x)$ степени не меньше 10000, что $h(PQ) \leqslant h(P) + h(Q)$.

Задача 11 (письменная)**.** Дан кубический четырехлен $x^3 + ax^2 + bx + c$ с целыми коэффициентами. Известно, что среди его значений в целых точках бесконечно много точных кубов. Докажите, что он сам является кубом многочлена.