Для начала — несколько простых неравенств.
группа "Лето", 28.10.2005

А. И. Храбров

1. Числа x, y и z лежат в интервале $(0,1)$. Докажите, что $x(1-y)+y(1-z)+z(1-x)\leqslant 1$.

2. Докажите, что для любых положительных чисел a_1, a_2, …, a_n и b_1, b_2, …, b_n

$$\min\frac{a_k}{b_k}\leqslant\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{b_1+b_2+\ldots+b_n}\leqslant\max\frac{a_k}{b_k}.$$

3. (Неравенство Шура) При всех положительных x, y, z и любом вещественном p справедливо неравенство

$$x^p(x-y)(x-z)+y^p(y-x)(y-z)+z^p(z-x)(z-y)\geqslant 0.$$

Причем равенство достигается только если числа x, y и z равны между собой.

4. Предположим, что числа x, y и z принадлежат отрезку $[0,1]$, докажите, что тогда

а) $\dfrac{x}{1+y}+\dfrac{y}{1+x}\leqslant 1$;

б) $\dfrac{x}{1+y+z}+\dfrac{y}{1+z+x}+\dfrac{z}{1+x+y}\leqslant 1$;

в) $\dfrac{x}{x^2+y+z}+\dfrac{y}{x+y^2+z}+\dfrac{z}{x+y+z^2}\geqslant 1$.

5. Сумма положительных чисел a_1, a_2, …, a_n равна S. Докажите неравенства

а) $\dfrac{a_1}{S-a_1}+\dfrac{a_2}{S-a_2}+\ldots+\dfrac{a_n}{S-a_n}\geqslant\dfrac{n}{n-1}$;

б) $\dfrac{S-a_1}{a_1}+\dfrac{S-a_2}{a_2}+\ldots+\dfrac{S-a_n}{a_n}\geqslant n(n-1)$;

6. Найдите максимум выражения

$$a+b+c+d-ab-ac-ad-bc-bd-cd+abc+abd+acd+bcd-abcd$$

при $|a|\leqslant 1$, $|b|\leqslant 1$, $|c|\leqslant 1$ и $|d|\leqslant 1$.

7. Докажите, что если $abc=1$ и a^3 больше 36, то

$$\frac{a^2}{3}+b^2+c^2>ab+bc+ca.$$

8. Среднее по величине из различных положительных чисел a, b, c меньше, чем среднее геометрическое наименьшего и наибольшего из них. Докажите неравенство $abc(a^3+b^3+c^3)\geqslant a^3b^3+b^3c^3+c^3a^3$.

9. (Неравенство Ацеля) Про вещественные числа a_1, a_2, …, a_n и b_1, b_2, …, b_n известно, что либо $a_1^2\geqslant a_2^2+a_3^2+\ldots+a_n^2$, либо $b_1^2\geqslant b_2^2+b_3^2+\ldots+b_n^2$. Тогда

$$(a_1b_1-a_2b_2-\ldots-a_nb_n)^2\geqslant(a_1^2-a_2^2-\ldots-a_n^2)(b_1^2-b_2^2-\ldots-b_n^2).$$

Напоминание:

Неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим.

Для всех неотрицательных чисел a_1, a_2, …, a_n справедливо неравенство

$$\sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n}\leqslant\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}.$$

Неравенство Коши–Буняковского.

Для любых вещественных чисел a_1, a_2, …, a_n и b_1, b_2, …, b_n справедливо неравенство

$$(a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n)^2\leqslant(a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2)(b_1^2+b_2^2+\ldots+b_n^2).$$