Индукция в неравенствах

Неравенства-2, группа "Лето", 28.10.2005

А. И. Храбров

1. Докажите, что для любого натурального $n \geqslant 3$ имеет место неравенство

$$\sqrt[n]{n} > \sqrt[n+1]{n+1}.$$

2. Сумма неотрицательных чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$ равна $1/2$. Докажите неравенство

$$\frac{1-x_1}{1+x_1} \cdot \frac{1-x_2}{1+x_2} \cdot \ldots \cdot \frac{1-x_n}{1+x_n} \geqslant \frac{1}{3}.$$

3. Для любого натурального числа n докажите неравенства

а) $1 + \dfrac{1}{2!} + \dfrac{1}{3!} + \ldots + \dfrac{1}{n!} \leqslant \dfrac{2n-1}{n}$;

б) $\dfrac{1}{2!} + \dfrac{2}{3!} + \dfrac{3}{4!} + \ldots + \dfrac{n-1}{n!} < 1$.

4. Числа $a_0, a_1, a_2, \ldots$ удовлетворяют условию $a_{k-1} + a_{k+1} \geqslant 2a_k$ при $k \geqslant 1$. Докажите неравенства

а) $\dfrac{a_0 + a_1 + \ldots + a_{n-1}}{n} + \dfrac{a_0 + a_1 + \ldots + a_{n+1}}{n+2} \geqslant 2 \cdot \dfrac{a_0 + a_1 + \ldots + a_n}{n+1}$;

б) $\dfrac{a_0 + a_1 + \ldots + a_{2n}}{n+1} \geqslant \dfrac{a_1 + a_3 + \ldots + a_{2n-1}}{n}$.

5. Докажите неравенство

$$\left(\frac{n}{x_1 + x_2 + \ldots + x_n} - 1\right)^n \leqslant \left(\frac{1}{x_1} - 1\right)\left(\frac{1}{x_2} - 1\right)\ldots\left(\frac{1}{x_n} - 1\right)$$

а) если $0 < x_k \leqslant \frac{1}{2}$ при $k = 1, 2, \ldots, n$;

б) если $x_k + x_{k+1} \leqslant 1$ при $k = 1, 2, \ldots n-1$ и $x_n + x_1 \leqslant 1$.

6. Докажите, что при любом натуральном n имеет место неравенство

$$1 + \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{3\sqrt{3}} + \frac{1}{4\sqrt{4}} + \ldots + \frac{1}{n\sqrt{n}} < 3.$$

7. Набор чисел $\{a_n\}$ удовлетворяет условиям $a_0 = 0$ и $a_{n+1} \geqslant a_n + 1$. Докажите неравенство

$$a_1^3 + a_2^3 + \ldots + a_n^3 \geqslant (a_1 + a_2 + \ldots + a_n)^2.$$