Неравенства, связанные с порядком

Неравенства-3, группа "Лето", 30.10.2005

А. И. Храбров

Последовательности чисел $\{a_k\}$ и $\{b_k\}$ называются *одинаково упорядоченными*, если при всех k, $m = 1, 2, \ldots, n$

$$(a_k - a_m)(b_k - b_m) \geqslant 0$$

и *обратно упорядоченными*, если при всех k и m имеет место обратное неравенство.

Примеры. 1. Когда $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \ldots \geqslant a_n$ и $b_1 \geqslant b_2 \geqslant \ldots \geqslant b_n$ последовательности $\{a_k\}$ и $\{b_k\}$ одинаково упорядочены, а если $b_1 \leqslant b_2 \leqslant \ldots \leqslant b_n$, то последовательности обратно упорядочены.

2. Последовательности неотрицательных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ и $a_1^2, a_2^2, \ldots, a_n^2$ одинаково упорядочены, а последовательности $a_1, a_2, \ldots, a_n$ и $1/a_1, 1/a_2, \ldots, 1/a_n$ обратно упорядочены.

3. Наборы $\{1,2,3\}$ и $\{2,1,3\}$ не являются ни одинаково упорядоченными, ни обратно упорядоченными.

4. Рассмотрим последовательность чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Для любой последовательности чисел $b_1, b_2, \ldots, b_n$ существует перестановка $b_1^*, b_2^*, \ldots, b_n^*$, одинаково упорядоченная с последовательностью $a_1, a_2, \ldots, a_n$ и существует перестановка $b_1^\diamond, b_2^\diamond, \ldots, b_n^\diamond$, обратно упорядоченная с последовательностью $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

5. Предположим, что последовательности $\{a_k\}$ и $\{b_k\}$ одинаково упорядочены и последовательность $\{b_k\}$ не содержит одинаковых членов. Тогда, если последовательности $\{b_k\}$ и $\{c_k\}$ одинаково упорядочены, то одинаково упорядоченными будут также и последовательности $\{a_k\}$ и $\{c_k\}$. А если последовательности $\{b_k\}$ и $\{c_k\}$ обратно упорядочены, то обратно упорядоченными будут и последовательности $\{a_k\}$ и $\{c_k\}$.

Если же обратно упорядоченными были последовательности $\{a_k\}$ и $\{b_k\}$, а также последовательности $\{b_k\}$ и $\{c_k\}$, то последовательности $\{a_k\}$ и $\{c_k\}$ будут одинаково упорядоченными (опять таки мы предполагаем, что в последовательности $\{b_k\}$ нет одинаковых членов).

Замечание. Если в последовательности $\{b_k\}$ есть равные числа, то утверждение из примера 5 может и не иметь места. Например, если все числа b_k равны между собой, то последовательность $\{b_k\}$ одинаков упорядочена с любой последовательностью. Кроме того она и обратно упорядочена с любой последовательностью.

Транснеравенство. Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_n$ и $b_1, b_2, \ldots, b_n$ — произвольные наборы вещественных чисел, а $c_1, c_2, \ldots, c_n$ некоторая перестановка набора $b_1, b_2, \ldots, b_n$. Среди сумм

$$S = a_1c_1 + a_2c_2 + \ldots + a_nc_n,$$

вычисленных для различных перестановок $c_1, c_2, \ldots, c_n$ наибольшей будет сумма, посчитанная для одинаково упорядоченных последовательностей $\{a_k\}$ и $\{c_k\}$, а наименьшей будет та сумма, для которой

Неравенство Чебышёва. Пусть наборы вещественных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ и $b_1, b_2, \ldots, b_n$ одинаково упорядочены. Тогда

$$\frac{a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n}{n} \geqslant \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \cdot \frac{b_1 + b_2 + \ldots + b_n}{n}.$$

Равенство достигается, только в случае, когда все числа в одном из наборов равны между собой. Если наборы $\{a_k\}$ и $\{b_k\}$ обратно упорядочены, то имеет место неравенство с противоположным знаком.

Предположим, что наборы чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ и $b_1, b_2, \ldots, b_n$ одинаково упорядочены, $p_1, p_2, \ldots, p_n$ — набор неотрицательных чисел. Тогда

$$\sum_{k=1}^{n} p_ka_k \sum_{k=1}^{n} p_kb_k \leqslant \sum_{k=1}^{n} p_ka_kb_k \sum_{k=1}^{n} p_k.$$

Если наборы чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ и $b_1, b_2, \ldots, b_n$ обратно упорядочены, то знак неравенства меняется на противоположный.

Задачи. 1. Докажите с помощью неравенства Чебышёва, что
а) Для положительных чисел a_1, a_2, …, a_n имеет место неравенство

$$(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}\right) \geqslant n^2.$$

б) Для любых чисел a_1, a_2, …, a_n выполнено неравенство

$$\sum_{k=1}^{n} |a_k| \leqslant \sqrt{n}\left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)^{1/2}.$$

2. Докажите, что для любых неотрицательных чисел a, b, c выполнено неравенство

$$a + b + c \geqslant \frac{a(bc + c + 1)}{ca + a + 1} + \frac{b(ca + a + 1)}{ab + b + 1} + \frac{c(ab + b + 1)}{bc + c + 1}.$$

3. Докажите, что для любых положительных чисел x, y и z имеют место неравенства

а) $\dfrac{xy}{z^2} + \dfrac{yz}{x^2} + \dfrac{zx}{y^2} \geqslant \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{z} + \dfrac{z}{x}$; в) $\dfrac{xy}{z^2} + \dfrac{yz}{x^2} + \dfrac{zx}{y^2} \geqslant \sqrt{\dfrac{xy}{z^2}} + \sqrt{\dfrac{yz}{x^2}} + \sqrt{\dfrac{zx}{y^2}}$.

б) $(x^2 + yz)(y^2 + zx)(z^2 + xy) \geqslant xyz(x + y)(y + z)(z + x)$;

4. Для любых положительных чисел a, b, c и натурального числа n докажите неравенство

$$\frac{a^n}{b + c} + \frac{b^n}{c + a} + \frac{c^n}{a + b} \geqslant \frac{a^{n-1} + b^{n-1} + c^{n-1}}{2}.$$

5. Для положительных чисел a_1, a_2, …, a_n докажите неравенство

$$\frac{1}{\dfrac{1}{1 + a_1} + \dfrac{1}{1 + a_2} + \ldots + \dfrac{1}{1 + a_n}} - \frac{1}{\dfrac{1}{a_1} + \dfrac{1}{a_2} + \ldots + \dfrac{1}{a_n}} \geqslant \frac{1}{n}.$$

Установите когда достигается равенство.

6. Выведите из транснеравенства неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим.