Классическая геометрия. Полярное соответствие.
группа “Лето”, 01.11.05

Пусть на плоскости фиксирована точка O и окружность ω радиуса R с центром в O.

Определение. Для каждой точки $X \neq O$ на луче OX строим точку X' такую, что $OX \cdot OX' = R^2$. (Точка X' называется *инверсным образом* точки X). Через точку X' проведем прямую x, перпендикулярную OX'. Прямая x называется *полярой* точки X, точка X называется *полюсом* прямой x. Соответствие $X \leftrightarrow x$ является взаимно-однозначным соответствием между точками, не совпадающими с O, и прямыми, не проходящими через O, и называется *полярным соответствием.*

Будем обозначать точки, не совпадающие с O (полюсы), большими латинскими буквами, а прямые, не проходящие через O (поляры), соответствующими маленькими буквами, полярное соответствеие обозначим стрелочкой ”$\leftrightarrow$”. Таким образом, факт полярного соответствия обозначается $A \leftrightarrow a, B \leftrightarrow b, C \leftrightarrow c, \ldots$.

Докажите **Свойства полярного соответствия.**

0. а) Пусть точка A расположена вне окружности ω. Проведем из A касательные AM и AN ($M, N \in \omega$). Тогда MN есть поляра a точки A.

   б) Если $A \in \omega$, то a есть касательная к ω, проведенная в A.

1. (двойственность) Докажите:

   а) $A \in b \Leftrightarrow B \in a$.

   б) $a \cap b \leftrightarrow AB$. (Если O, A, B не на одной прямой.)

   в) A, B, C на одной прямой $\Leftrightarrow a, b, c$ проходят через одну точку или параллельны.

2*. Пусть две секущие m и l, проходящие через точку A, пересекают ω в точках M_1, M_2 и L_1, L_2. Прямые M_1L_1 и M_2L_2 пересекаются на поляре a точки A или параллельны a.

Основные задачи.

1. (симметричная бабочка).

   а) Дана точка A на диаметре BC полуокружности ω. Точки X, Y на ω таковы, что $\angle XAB = \angle YAC$. Докажите, что прямые XY проходят через одну точку.

   б) (симедиана) В треугольнике ABC точки A', B', C' — точки касания вписанной окружности со сторонами. Докажите, что AA' — симедиана (т.е. прямая, симметричная медиане относительно ”своей” биссектрисы) в треугольнике $A'B'C'$.

   в) (Маркелов - из Шарыгина) Точки A и A' инверсны относительно окружности ω, A' — внутри ω. Через A' проводятся хорды XY. Докажите, что центр вписанной и одной из вневисанных окружностей треугольника AXY неподвижен.

2. (гармонический четырехугольник) $ABCD$ — вписанный четырехугольник такой, что касательные в точках A и C пересекаются на прямой BD или параллельны BD. Докажите, что касательные в точках B и D пересекаются на прямой AC или параллельны AC.

3. (вписанный четырехугольник) Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность с центром O. Диагонали $ABCD$ пересекаются в точке P, продолжения сторон AB и CD — в точке R, продолжения сторон BC и DA — в точке Q. Докажите, четверка точек O, P, Q, R — ортоцентрицеская (т.е. каждая точка — ортоцентр треугольника с вершинами в оставшихся трех).

4. (описанный четырехугольник) Четырехугольник $ABCD$ описан около окружности, K, L, M, N — точки касания с окружностью сторон AB, BC, CD, DA, соответственно. Продолжения сторон AB и CD пересекаются в точке R, продолжения сторон BC и DA — в точке Q, продолжения сторон KL и MN — в точке S, продолжения сторон LM и NK — в точке T. Докажите, что Q, R, S, T — на одной прямой.

Задачи для письменного решения.

А. В окружности фиксированана хорда MN. Для каждого диаметра этой окружности рассмотрим точку, в которой пересекаются прямые AM и BN, и проведем через нее прямую l, перпендикулярную AB. Докажите, что все эти прямые l проходят через одну точку.

Б. Четырехугольник $ABCD$ описан около окружности, K, L, M, N — точки касания с окружностью сторон AB, BC, CD, DA, соответственно. Докажите, что AC, BD, KM, LN пересекаются в одной точке.

Дополнительная задача.

(вписанно-описанный четырехугольник) Четырехугольник $ABCD$ описан около окружности ω с центром I и вписан в окружность Ω с центром O. Диагонали $ABCD$ пересекаются в точке P, продолжения сторон AB и CD — в точке R, продолжения сторон BC и DA — в точке Q.

а) Докажите, что O, I, P — на одной прямой.

б) Фиксируем ω и Ω, и рассмотрим всевозможные четырехугольники $ABCD$, описанные около окружности ω и вписанные в окружность Ω (см. замечание). Докажите, что для всех таких четырехугольников точка P и прямая QR неподвижны.

Комментарии.

Набросок доказательства свойства 2 поляры: Касательные в точках M_1, M_2 пересекаются в точке M, касательные в точках L_1, L_2 пересекаются в точке L, $M \leftrightarrow m, L \leftrightarrow l$. Следовательно, $ML = a$. пусть касательные в точках M_1, L_1 пересекаются в точке K_1, касательные в точках M_2, L_2 пересекаются в точке K_2. Теперь применим теорему Менелая к треугольникам MLK_1 и MLK_2.

Рассмотрите различные картинки.

К задаче 2. Указание к решению, не использующему поляры: условие задачи эквивалентно равенству $AB \cdot CD = BC \cdot DA$.

К дополнительной задаче. Согласно, теореме Понселе, если хотя бы один такой четырехугольник существует, то таких четырехугольниов бесконечно много.