Применение классичеких неравенств
группа "Зима", 28.10.2005

А. И. Храбров

Неравенство Коши–Буняковского. Для любых вещественных чисел a_1, a_2, ..., a_n и b_1, b_2, ..., b_n

$$(a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n)^2 \leqslant (a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2).$$

Полезнеы переформулировки.

Для любых вещественных чисел a_1, a_2, ..., a_n и неотрицательных чисел b_1, b_2, ..., b_n

$$\frac{a_1^2}{b_1} + \frac{a_2^2}{b_2} + \ldots + \frac{a_n^2}{b_n} \geqslant \frac{(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)^2}{b_1 + b_2 + \ldots + b_n}.$$

Для неотрицательных чисел a_1, a_2, ..., a_n и b_1, b_2, ..., b_n (не все числа b_1, b_2, ..., b_n равны нулю одновременно)

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n \geqslant \frac{(\sqrt{a_1b_1} + \sqrt{a_2b_2} + \ldots + \sqrt{a_nb_n})^2}{b_1 + b_2 + \ldots + b_n}.$$

Неравенство о средних. Для любых положительных чисел a_1, a_2, ..., a_n имеют место нераевнства

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{a_1a_2 \ldots a_n}$$

и при $p > q$

$$\left(\frac{a_1^p + a_2^p + \ldots + a_n^p}{n}\right)^{1/p} \geqslant \left(\frac{a_1^q + a_2^q + \ldots + a_n^q}{n}\right)^{1/q}.$$

Задачи.

1. Для положительных чисел a, b и c докажите неравенство

$$\frac{a^3}{b + 2c} + \frac{b^3}{c + 2a} + \frac{c^3}{a + 2b} \geqslant \frac{a^2 + b^2 + c^2}{3}.$$

2. Числа x, y и z принадлежат интервалу $(2, 4)$. Докажите, неравенство

$$\frac{x}{y^2 - z} + \frac{y}{z^2 - x} + \frac{z}{x^2 - y} > 1.$$

3. Числа x, y и z из отрезка $[0, 1]$. Докажите неравенство

$$\frac{x}{7 + y^3 + z^3} + \frac{y}{7 + z^3 + x^3} + \frac{z}{7 + x^3 + y^3} \leqslant \frac{1}{3}.$$

4. а) Сумма положительных чисел a, b, c и d равна 1. Докажите неравенство

$$\frac{a^2}{a + b} + \frac{b^2}{b + c} + \frac{c^2}{c + d} + \frac{d^2}{d + a} \geqslant \frac{1}{2}.$$

б) Сумма положительных чисел a_1, a_2, ..., a_n равна 1. При некотором положительном λ и всех k от 1 до n имеют место оценки $\lambda a_k < 1$. Докажите неравенство

$$\frac{a_1^2}{1 - \lambda a_1} + \frac{a_2^2}{1 - \lambda a_2} + \ldots + \frac{a_n^2}{1 - \lambda a_n} \geqslant \frac{1}{n - \lambda}.$$

5. Для положительных чисел x_1, x_2, ..., x_n докажите неравенство

$$\frac{x_1}{x_2+x_3}+\frac{x_2}{x_3+x_4}+\ldots+\frac{x_{n-1}}{x_n+x_1}+\frac{x_n}{x_1+x_2}\geqslant\frac{n}{2}$$

при а) $n=3$; б) $n=4$; в) $n=5$; г) $n=6$;

д) Для любых вещественных чисел, удовлетворяющих условию $0<x_1\leqslant x_2\leqslant\ldots\leqslant x_n$.

е**) Еще хоть для какого-нибудь n.

6. (Неравенство Гюйгенса) Для положительных чисел x_1, x_2, ..., x_n, имеет место неравенство

$$(1+\sqrt[n]{x_1x_2\ldots x_n})^n\leqslant(1+x_1)(1+x_2)\ldots(1+x_n).$$

7. Произведение положительных чисел a, b и c равно единице. Докажите неравенство

$$\frac{1}{a(a+1)}+\frac{1}{b(b+1)}+\frac{1}{c(c+1)}\geqslant\frac{3}{2}.$$

8. Найдите наименьшее значение выражения

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{x_k^5}{x_1+x_2+\ldots+x_n-x_k},$$

где x_1, x_2, ..., x_n — положительные числа, удовлетворяющие условию $x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2=1$.