Классическая геометрия. Касание окружностей.
группа "Зима", 31.10.05

Примем следующие обозначения для элементов треугольника ABC:

A_0, B_0, C_0 — середины сторон;

ω — вписанная окружность, I — ее центр, A_1, B_1, C_1 — точки ее касания со сторонами;

$\omega_A, \omega_B, \omega_C$ — вневписанные окружности, I_A, I_B, I_C — их центры, A_2, B_2, C_2 — точки их касания со сторонами;

Ω — описанная окружность, O — ее центр, A' и A'' — середины дуг BC, соответственно содержащей и не содержащей точку A; B' и B'', C' и C'' определяются аналогично.

Рассмотрим окружность S_A, касающуюся сторон AB и AC и окружности S_A (внутренним образом) в точках $K = K_A$, $L = L_A$, $T = T_A$.

Основная серия задач — установите следующие факты.

1. Точки T, K, C' (а также T, L, B') лежат на одной прямой.

2. TA — симедиана (т. е. прямая, симметричная медиане относительно соответствующей биссектрисы) треугольника $B'C'T$.

3. Прямые AT_A, BT_B, CT_C пересекаются в одной точке X, которая является центром гомотетии с положительным коэффициентом окружностей ω и Ω.

4. TA'' — медиана треугольника $B'C'T$.

5. T, I, A'' лежат на одной прямой.

6. T, I, K, B (а также T, I, L, C) лежат на одной окружности, причем CC' (соответственно BB') касается этой окружности.

7. K, I, L лежат на одной прямой.

Дополнительные задачи.

8. Докажите, что AA' — биссектриса угла TAA_2. Получите новое решение задачи 3 и новое описание точки X: X изогонально сопряжена точке Нагеля (т. е. точке пересечения прямых AA_2, BB_2, CC_2).

9. Докажите, что прямые KL, TA' и BC пересекаются в одной точке Y_A.

10. Докажите, что точки Y_A, Y_B, Y_C (точка из задачи 10 и построенные аналогично) лежат на одной прямой.

11. Найдите аналоги задач 1 — 7 для окружности S'_A, касающейся продолжений сторон AB, AC и окружности Ω внешним образом.

Задачи для письменного решения — обобщения задачи 7.

Пусть D — точка на стороне AC треугольника ABC, S — окружность, касающаяся окружности Ω, а также отрезков BD, DC — в точках M и N соответственно.

А. Докажите, что прямая MN проходит через I.

Б. Докажите, что прямая, проведенная через N параллельно BD, касается ω.

Решения, комментарии.

Есть множество содержательных геометрических сюжетов, в которых присутствуют касающиеся окружности. Зачастую задачи с касанием окружностей с трудом поддаются аналитическому счету. Неслучайно одной из самых трудных и красивых геометрических теорем признается теорема Фейербаха о касании вписанной окружности треугольника и его окружности девяти точек.

Цель занятия — рассмотреть несколько сюжетов и познакомиться с рядом геометрических фактов и приемов, которые позволяют находить геометрических подход к решению задач о касании окружностей.

Основная серия задач.

1. В случае касания окружности полезно рассмотреть гомотетию с центром в точке касания, которая переводит одну из окружностей в другую.

   В данной задаче при гомотетии H с центром T, переводящей S_A в Ω прямая AB переходит в касательную l_C, параллельную AB, а K — в точку касания Ω и l_C. Остается заметить, что точка касания — это C'.

2. Продолжим рассмотрение гомотетии H из решения задачи 1. Пусть касательные l_B и l_C к Ω пересекаются в P_A. Тогда P_A — образ A при гомотетии H. Следовательно, T, A и P_A лежат на одной прямой.

   Остается воспользоваться известным свойством симедианы: она проходит через точку пересечения касательных, проведенных к описанной окружности в двух вершинах треугольника.

   Одно из самых красивых решений задачи о симедиане приведено в книге Ефремова. Идея решения такова: достроим треугольник $B'TC'$ до параллелограмма $B'TC'Q$. Подсчетом углов с вершинами B' и C' нетрудно показать, что P_A и Q — изогонально сопрояжены относительно треугольника $B'TC'$.

3. При гомотетии H треугольник ABC переходит в треугольник $P_AP_BP_C$. Прямые AT_A, BT_B, CT_C пересекаются в центре гомотетии X этих треугольников. Описание точки X вытекает из того, что вписанная окружность треугольника $P_AP_BP_C$ совпадает с описанной окружностью треугольника ABC.

4. То, что TA'' — медиана треугольника $B'C'T$, следует из равенства дуг $C'A$ и $A''B'$ и предыдущей задачи.

5. Дуги $C'A''$ и $B'C$ равны, поэтому CC' параллельна $A''B'$. Аналогично, BB' параллельна $A''C'$. Следовательно, $C'A''B'I$ — параллелограмм, значит $A''I$ делит отрезок $B'C'$ пополам. Теперь все следует из предыдущей задачи.

6. Из предыдущего вытекает, что углы ITK и IBK опираются на равные дуги и равны половине угла C. Касание следует из теоремы об угле между касательной и хордой.

7. Вытекает из предыдущего подсчетом углов.

   Задача имеет независимое решение: достаточно применить теорему Паскаля к (самопересекающемуся) шестиугольнику $ABB'TC'C$.

Дополнительные задачи.

8. Помимо гомотетии, в случае касания окружностей бывает эффективна инверсия.

   При инверсии с центром A и подходящим радиусом окружность Ω перейдет в касательную m к ω_A, симметричную BC относительно биссектрисы угла a, а окружность S_A перейдет в ω_A. Следовательно, T_A и точка R касания m и ω_A инверсны. Значит, A, R, T лежат на одной прямой, а AT и AA_2 симметричны относительно биссектрисы угла A.

9. Например, Y_A — это точка пересечения радикальных осей окружностей Ω, IBC и ITA'.

   Автором задачи 9 является И.Ф.Шарыгин.

10. Кроме того, Y_A — радикальный центр окружностей Ω, IBC и I (точка I рассматривается как окружность). Каждая из точек Y_A, Y_B, Y_C имеет одинаковую степень относительно окружностей Ω и I, следовательно Y_A, Y_B, Y_C лежат на радикальной оси этих окружностей.

11. Комментарий. Есть причины, по которым, скажем, вписанная и вневписанная окружности обладают одинаковыми или двойственными свойствами. Это происходит, например, потому, что в аналитической записи вписанная и вневписанная окружности практически не различаются — они описываются как окружности, касающиеся трех данных прямых; различия только в геометрическом расположении. Каждый раз, доказав некий геометрический факт, естественно попытаться найти "близнеца" для новой геометрической картинки.

Литература:

В.Прасолов. Задачи по геометрии. Глава 3, $\S 3, 8, 10$.

В.Протасов. Квант 1992, 9. Вокруг теоремы Фейербаха.

М.Сонкин. Окружности, вписанные в сегменты, и касательные. Конф. турнира городов 1999 г.

И.Ф.Шарыгин. Геометрия 9 — 11.