# Буря на Массовом поле.

А. Гаврилюк

**Определение.** *Центром масс* системы нагруженных точек $(A_1, m_1), ...(A_n, m_n)$ ($A_i$ - точки плоскости, $m_i$ - "массы т.е. числовые коэффициенты, приписанные этим точкам), называется такая точка $O$ плоскости, что $m_1\overrightarrow{OX_1} + ... + m_n\overrightarrow{OX_n} = \overrightarrow{o}$ (При этом считается, что $m_1 + ...m_n \neq 0$).

**Задача 1.**
а)Доказать, что для системы нагруженных точек (из определения) существует единственный центр масс
б)Доказать, что для любой точки $X$ верно $\overrightarrow{XO} = \frac{m_1\overrightarrow{XX_1}+...+m_n\overrightarrow{XX_n}}{m_1+...+m_n}$

**Задача 2.** Даны 2 системы нагруженных точек $(X_1, a_1), ...(X_n, a_n)$ и $(Y_1, b_1), ...(Y_m, b_m)$. Точки $X$ и $Y$ - соответственно их центры масс. Доказать, что центр масс этих $m + n$ точек совпадает с центром масс сисемы $(X, a_1 + ... + a_n)$ и $(Y, b_1 + ... + b_m)$

**Задача 3.** Доказать теорему Чевы методом масс. Т.е. если в треугольнике $ABC$ точки $A_1, B_1, C_1$ лежат соответственно на сторонах $BC, AC, AB$, то отрезки $AA_1, BB_1, CC_1$ пересекаются в одной точке $\Leftrightarrow \frac{AC_1*BA_1*CB_1}{AB_1*CA_1*BC_1} = 1$

**Задача 4.** Пусть в условии предыдущей задачи точка $T$ - точка пересечения чевиан. Докажите, что $\frac{BT}{TB_1} = \frac{BA_1}{A_1C} + \frac{BC_1}{C_1A}$

**Задача 5.** Точки $K, L, M, N$ - середины сторон четырёхугольника $ABCD$. Докажите, что точка пересечения отрезков $LN$ и $KM$ делит пополам их, а также отрезок, соединяющий середины диагоналей $ABCD$

**Задача 6.** $A_1, ...F_1$ - середины сторон $AB, BC, ...FA$ соответствующего шестиугольника. Доказать, что точки пересечения медиан треугольников $A_1C_1E_1$ и $B_1D_1E_1$ совпадают.

**Задача 7.** Три одинаковые мухи ползают по периметру треугольника $ABC$ так, что их центр масс неподвижен. Известно, что одна из мух проползла всю границу. Докажите, что центр масс мух совпадает с центром масс $ABC$.

**Задача 8.** На окружности дано $n$ точек. Через центр масс $n - 2$ точек проводится прямая, перпендикулярная хорде, соединяющей оставшиеся 2 точки. Доказать, что все такие прямые пересекаются в одной точке.

**Задача 9.** В углы треугольника $ABC$ вписаны попарно касающиеся окружности. Точки касания $A_1, B_1, C_1$ этих окружностей лежат, соответственно против вершин $ABC$. Докажите, что отрезки $AA_1, BB_1, CC_1$ пересекаются в одной точке.