# Вписанные и описанные... Буря.

А. Гаврилюк

**Задача 1.** Дан четырёхугольник $ABCD$. Точки $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2, D_1, D_2$ лежат на сторонах $AB, BC, CD, DA$ соответственно. Отрезки $A_1C_2$,$A_2C_1$,$B_1D_2$,$B_2D_1$ делят $ABCD$ на 9 четырёхуголников. Оказалось, что центральный и примыкающие к вершинам $A, B, C, D$ - описанные. Докажите, что и $ABCD$ - описанный.

**Задача 2.** В треуголнике $ABC$ $B_1$ - точка касания вписанной окружности со стороной $AC$. Точки $A_2, B_2, C_2$ - точки касания окружности, вневписанной в угол $B$ с соответствующими сторонами треугольника. Докажите, что $CB_1 = AB_2 = AC_2 = \frac{AC+BC-AB}{2}$

**Задача 3.** Точки $F_1$ и $F_2$ - фокусы эллипса. Точки $A$ и $C$ - точки пересечения отрезков $BF_1$ и $BF_2$ с этим эллипсом соответственно. $D$ - точка пересечения отрезков $F_1C$ и $F_2A$. Докажите, что $ABCD$ - описанный четырёхугольник.

**Задача 4.** Через точки пересечения продолжений сторон выпуклого четырёхугольника $ABCD$ проведены 2 прямые , делящие его на 4 четырёхугольника. Докажите, что если четырёхугольники, примыкающие в вершинам $B$ и $D$ - описанные, то $ABCD$ также описан.

**Задача 5.** $ABCD$ - вписанный четырёхугольник. $H_C, H_D$ - ортоцентры треугольников $ABD$ и $ABC$. Докажите, что $CDH_CH_D$ - описанный

**Задача 6.** $ABCD$ - вписанный четырёхугольник. Докажите, что центры вписанных окружностей треугольников $ABC$, $BCD$, $CDA$ и $DAB$ являются вершинами прямоугольника.

**Задача 7.** В треугольнике $ABC$ на стороне $AC$, как на диаметре, построена окружность. Она пересекает стороны $AB$ и $BC$ в точках $K$ и $L$. $M$ - точка пересечения касательных к окружности, взятых в этих точках. Докажите, что $BM$ перпендикулярно $AC$.

**Задача 8.** Диагонали описанной трапеции $ABCD$ с основаниями $AD$ и $BC$ пересекаются в точке $O$. Радиусы вписанных окружностей треугольников $AOD$,$AOB$,$BOC$ и $COD$ равны $r_1, r_2, r_3, r_4$ соответственно. Докажите $\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_3} = \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_4}$